# Conteúdo

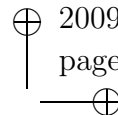
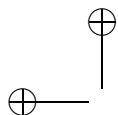
# Prefácio

A Topologia Algébrica pode ser considerada como o estudo de functores, cada um dos quais vai de uma categoria de espaços topológicos a uma categoria de natureza algébrica. Um exemplo de functor desse tipo é o grupo fundamental, visto no livro [GFER], publicado pelo Projeto Euclides.

O presente livro se ocupa de grupos de homologia. Uma teoria de homologia é um método de associar, a cada espaço topológico de uma certa categoria, uma série de grupos (ou, mais geralmente, módulos), chamados os grupos de homologia desse espaço, de tal maneira que espaços homeomorfos têm grupos de homologia isomorfos. Diferentemente do grupo fundamental, os grupos de homologia são abelianos.

No Capítulo I são apresentadas, de modo abstrato, as noções algébricas e a linguagem homológica adequada, para uso nos três capítulos seguintes, cada um dos quais dedicado a uma teoria de homologia referente a um tipo de espaço topológico.

Os Capítulos II, III e IV são basicamente independentes, podendo ser lidos em qualquer ordem, embora o procedimento recomendável seja seguir a ordem em que são apresentados.

O Capítulo II trata da cohomologia de deRham, que é baseada nas formas diferenciais numa variedade. Para simplificar a apresentação (sem perder a generalidade), as variedades aqui consideradas acham-se todas mergulhadas no espaço euclidiano. Isto faz com que os seus espaços tangentes sejam mais visíveis e, principalmente, põe à nossa disposição a vizinhança tubular, instrumento conveniente em várias situações. Neste capítulo são demonstrados teorema clássicos importantes como as dualidades de Poincaré

e de Alexander, o teorema de separação de Jordan-Brouwer e a invariância topológica dos abertos do espaço euclidiano. É ainda mostrado como, mediante uma passagem ao limite, pode-se adaptar a cohomologia de deRham a conjuntos que não são variedades, como os compactos do espaço euclidiano. Este capítulo também começa a evidenciar a utilidade da seqüência de Mayer-Vietoris, que será amplamente empregada no restante do livro.

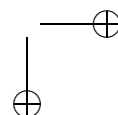
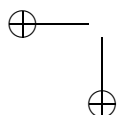
O Capítulo III estuda os grupos de homologia dos poliedros. As cadeias simpliciais nos levam de volta às idéias seminais de Poincaré, que foram aperfeiçoadas, estendidas e aprofundadas sucessivamente por Emmy Noether, S. Lefschetz, H. Hopf, J. Alexander e outros. É introduzido o anel de cohomologia e é demonstrado o teorema dos pontos fixos de Lefschetz.

O Capítulo IV se ocupa da homologia singular, cuja abrangência inclui qualquer espaço topológico. É completada a tarefa de estabelecer a compatibilidade das três teorias estudadas no livro, provando-se que, num espaço triangulável, os grupos de homologia simplicial e singular são isomorfos e dando-se uma demonstração do Teorema de deRham segundo o qual, numa variedade, os grupos de cohomologia singular são isomorfos aos grupos de cohomologia de deRham. É também demonstrado o teorema de Poincaré, mostrando que o grupo de homologia singular de dimensão 1 é o grupo fundamental abelianizado.

Este livro foi concebido como um texto introdutório de Topologia Algébrica, ao nível do início de pós-graduação.

Agradeço ao professor Cesar Camacho e aos estudantes do IMPA Jorge Eric e Renato Vianna pelo leitura crítica do manuscrito. A digitação ficou a cargo de Wilson Góes, a quem também agradeço.

Rio de Janeiro, maio de 2009

Elon Lages Lima

# Capítulo I

# Homologia formal

Neste capítulo será feita uma breve apresentação dos conceitos e fatos básicos nos quais se fundamentam as diversas maneiras de desenvolver a teoria da homologia (e da cohomologia). De certo modo, os capítulos seguintes tratam de casos particulares das noções gerais introduzidas aqui.

## 1 Complexo de cadeias

Seja $A$ um anel comutativo com unidade. Um *complexo de cadeias* com coeficientes em $A$ é uma seqüência $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ de $A$-módulos $C_p$, $p \geq 0$, inteiro, e homomorfismos $\partial_p \colon C_p \to C_{p-1}$ tais que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Escreve-se

$$\mathcal{C}\colon \cdots \to C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Cada elemento $x \in C_p$ é chamado uma *$p$-cadeia* ou uma *cadeia de dimensão $p$*. Se $\partial_p x = 0$, diz-se que $x$ é um *$p$-ciclo* ou simplesmente um *ciclo*.

O conjunto $Z_p$ dos $p$-ciclos é um submódulo de $C_p$. De fato, $Z_p$ é o núcleo do homomorfismo $\partial_p \colon C_p \to C_{p-1}$.

Se $y = \partial_{p+1} x$, diz-se que a $p$-cadeia $y$ é o *bordo* da $(p+1)$-cadeia $x$. O conjunto $B_p$ das $p$-cadeias que são bordos de $(p+1)$-cadeias é um submódulo de $C_p$ ; $B_p$ é a imagem do homomorfismo $\partial_{p+1}\colon C_{p+1} \to C_p$ .

Cada homomorfismo $\partial_p\colon C_p \to C_{p-1}$ é chamado de *operador-bordo*. A menos que seja necessário ser mais explícito, escreve-se $\partial$ em vez de $\partial_p$ , de modo que $\partial\partial x = 0$ para toda cadeia $x \in C_p$ .

A relação fundamental $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ significa que todo bordo é um ciclo, ou seja, que $B_p \subset Z_p$ .

O $A$-módulo quociente $H_p = H_p(\mathcal{C}) = Z_p/B_p$ chama-se o *grupo de homologia* $p$-dimensional do complexo $\mathcal{C}$ com coeficientes em $A$. Seus elementos são as *classes de homologia*

$$[z] = z + B_p = \{z + \partial x\, ;\, x \in C_{p+1}\}$$

dos ciclos $z \in Z_p$ . Se $z$ e $z'$ são ciclos $p$-dimensionais, tem-se $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = \partial x$ para algum $x \in C_{p+1}$ . Diz-se então que $z$ e $z'$ são *ciclos homólogos*.

Se, para cada $p \geq 0$, tivermos um submódulo $C'_p \subset C_p$ tal que $\partial C'_{p+1} \subset C'_p$ então, pondo $\partial'_p = \partial_p \mid C'_p$ , a seqüência $\mathcal{C}' = (C'_p, \partial'_p)$ é um complexo de cadeias, chamado um *subcomplexo* de $\mathcal{C}$.

Considerando, para cada $p \geq 0$, o $A$-módulo quociente $\overline{C}_p = C_p/C'_p$ , existe um único homomorfismo $\bar{\partial}_p\colon \overline{C}_p \to \overline{C}_{p-1}$ que torna comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & {\scriptstyle j}\downarrow \\ \overline{C}_p & \xrightarrow{\bar{\partial}_p} & \overline{C}_{p-1}\,, \end{array}$$

onde $j$ é a aplicação quociente. Por definição $\overline{\partial}(jx) = j(\partial x)$. É claro que $\overline{\partial}_p \circ \overline{\partial}_{p+1} = 0$, logo a seqüência $\overline{\mathcal{C}} = (\overline{C}_p, \overline{\partial}_p)$ é um complexo de cadeias, chamado o *quociente* de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}'$.

Sejam $\mathfrak{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathfrak{Y} = (Y_p, \partial_p)$ complexos de cadeias, cujos operadores-bordo indicamos com o mesmo símbolo $\partial_p = \partial$. Um *morfismo* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ é uma seqüência de homomorfismos $f_p\colon X_p \to Y_p$ tais que $f_p(\partial x) = \partial f_{p+1}(x)$ para todo $x \in X_p$. Isto significa que, no diagrama abaixo, todos os retângulos são comutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to X_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & X_p & \xrightarrow{\partial} & X_{p-1} \to \cdots \to & X_0 \\
\downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & \downarrow f_0 \\
\cdots \to Y_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & Y_p & \xrightarrow{\partial} & Y_{p-1} \to \cdots \to & Y_0
\end{array}$$

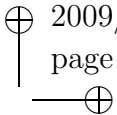
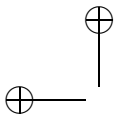
Segue-se das relações $\partial f_p(x) = f_{p-1}(\partial x)$ e $f_p(\partial x) = \partial f_{p+1}(x)$ que, para todo $p \geq 0$, o homomorfismo $f_p\colon X_p \to Y_p$ transforma $p$-ciclos de $\mathfrak{X}$ em $p$-ciclos de $\mathfrak{Y}$ e $p$-bordos também, ou seja, $f_p(Z_p(\mathfrak{X})) \subset Z_p(\mathfrak{Y})$ e $f_p(B_p(\mathfrak{X})) \subset B_p(\mathfrak{Y})$; logo $f_p$ induz, por passagem ao quociente, um homomorfismo $(f_p)_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{Y})$, definido por $(f_p)_*[z] = [f_p(z)]$ para toda classe $[z] \in H_p(\mathfrak{X})$ de um ciclo $z \in Z_p(\mathfrak{X})$.

Freqüentemente se escreve apenas $f_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{Y})$.

O homomorfismo induzido $f_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{Y})$ é *natural* no seguinte sentido: se $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{W}$ é outro morfismo entre complexos de cadeias, induzindo, para cada $p \geq 0$ o homomorfismo $g_*\colon H_p(\mathfrak{Y}) \to H_p(\mathfrak{W})$ então o morfismo composto $g \circ f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{W}$ induz o homomorfismo $(g \circ f)_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{W})$ e tem-se $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Evidentemente, se $\mathrm{id}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ é o morfismo identidade, então $\mathrm{id}_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{X})$ é a aplicação identidade.

Segue-se imediatamente que se o morfismo $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ admite o morfismo inverso $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ então $f_*\colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{Y})$ é invertível para todo $p \geq 0$ sendo $(f_*)^{-1} = g_*$.

Exemplos óbvios de morfismos entre complexos de cadeias se obtêm a partir de um subcomplexo $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. A aplicação de inclusão $i\colon \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ e a projeção $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ são morfismos.

É da maior relevância ressaltar que, embora $i\colon \mathcal{C}'_p \to \mathcal{C}_p$ seja injetivo e $j\colon C_p \to C_p/C'_p$ seja sobrejetivo, essas propriedades não são

necessariamente herdadas pelos homomorfismos induzidos $i_*\colon H_p(\mathcal{C}') \to H_p(\mathcal{C})$ e $j_*\colon H_p(\mathcal{C}) \to H_p(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$.

**Exemplo 1.** Seja $A$ o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Consideremos o complexo $\mathcal{C}$ no qual $C_0$ é o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos $a$, $b$, $c$ (que podemos imaginar como os vértices do triângulo $abc$), $C_1$ é o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos $ab$, $bc$, $ca$ (lados do triângulo) e $C_2$ é o grupo cíclico cujo gerador livre chamamos de $abc$. Os grupos $C_p$ com $p > 2$ são todos iguais a zero. Os operadores-bordo $\partial_2\colon C_2 \to C_1$, $\partial_1\colon C_1 \to C_0$ são definidos assim:

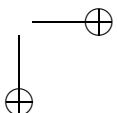
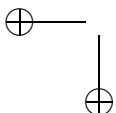
$\partial(abc) = ab + bc + ca$
$\partial(ab) = b - a$, $\partial(bc) = c - b$ e $\partial(ca) = a - c$.

Obviamente, $\partial a = \partial b = \partial c = 0$.
Vê-se sem dificuldade que $\partial\partial = 0$ em todas as dimensões. Na verdade, basta verificar que $\partial(\partial(abc)) = 0$.

É claro que, em dimensão 2, a cadeia nula é o único ciclo, de modo que $H_2(\mathcal{C}) = \{0\}$. Vejamos quais são os ciclos de dimensão 1. Uma cadeia $x \in C_1$ é da forma $x = m \cdot ab + n \cdot bc + p \cdot ca$, onde $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\partial x = \partial(m \cdot ab + n \cdot bc + p \cdot ca) &= m \cdot b - m \cdot a + n \cdot c - n \cdot b \\ &+ p \cdot a - p \cdot c = (p - m)a + (m - n)b + (n - p)c.\end{aligned}$$

Portanto $\partial x = 0 \Leftrightarrow m = n = p \Leftrightarrow x = m(ab + bc + ca)$. Assim, o ciclo $z = ab + bc + ca$ é o gerador de $Z_1(\mathcal{C})$. Como se tem $z = \partial(abc)$, segue-se que $Z_1(\mathcal{C}) = B_1(\mathcal{C})$, portanto o grupo de homologia $H_1(\mathcal{C}) = Z_1(\mathcal{C})/B_1(\mathcal{C})$ é nulo.

Falta calcular $H_0(\mathcal{C})$. Toda 0-cadeia é, por definição, um ciclo. Portanto $Z_0(\mathcal{C})$ é o grupo abeliano livre gerado por $a$, $b$ e $c$. Já vimos que o bordo de uma 1-cadeia genérica $x = m \cdot ab + n \cdot bc + p \cdot ca$ tem a forma $y = \partial x = (p - m)a + (m - n)b + (n - p)c$. Como $(p - m) + (m - n) + (n - p) = 0$, concluímos que se uma 0-cadeia $y = k_1 \cdot a + k_2 \cdot b + k_3 \cdot c$ é um bordo então $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. (A soma

$k_1 + k_2 + k_3$ chama-se o *índice* da cadeia $y$.) Ora, mudando bruscamente de notação, um exercício elementar mostra que o sistema de três equações lineares $x - y = k_1$, $y - z = k_2$, $z - x = k_3$ tem solução se, e somente se, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Portanto uma 0-cadeia é um bordo se, e somente se, seu índice é zero. (Ou ainda: duas 0-cadeias são homólogas se, e somente se, têm o mesmo índice.) Assim, o homomorfismo $In\colon C_0 \to \mathbb{Z}$, que associa a cada 0-cadeia seu índice, tem como núcleo o conjunto $B_0$ das cadeias que são bordos. Passando ao quociente, obtemos o isomorfismo $C_0/B_0 \approx \mathbb{Z}$, ou seja, $H_0(\mathcal{C}) \approx \mathbb{Z}$, pois $C_0 = Z_0$.

Em suma: os grupos de homologia do complexo $\mathcal{C}$ são $H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathcal{C}) = H_2(\mathcal{C}) = \{0\}$. $\triangleright$

**Exemplo 2.** Consideremos agora o subcomplexo $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ no qual $C'_2 = \{0\}$, $C'_1 = C_1$ e $C'_0 = C_0$. Então $H_2(\mathcal{C}') = \{0\}$ e $H_0(\mathcal{C}') = H_0(\mathcal{C}) \approx \mathbb{Z}$ mas, como $\partial'_2 = 0$, tem-se $B'_1 = \{0\}$, portanto $H_1(\mathcal{C}') = Z'_1 \approx \mathbb{Z}$. Assim, os grupos de homologia do subcomplexo $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ são isomorfos a $\mathbb{Z}$ nas dimensões 0 e 1 e nulos nas demais dimensões. Isto nos dá um exemplo em que o homeomorfismo $i_*\colon H_1(\mathcal{C}') \to H_1(\mathcal{C})$, induzido pela inclusão $i\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, não é injetivo.

Ainda neste exemplo, no complexo quociente $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ tem-se $\overline{C}_2 = C_2$, $\overline{C}_1 = \overline{C}_0 = \{0\}$. Portanto $H_1(\overline{\mathcal{C}}) = H_0(\overline{\mathcal{C}}) = \{0\}$ e $H_2(\overline{\mathcal{C}})$ é o grupo cíclico infinito gerado pela classe de homologia do 2-ciclo $j(abc) \in \overline{C}_2$, onde $j\colon C_2 \to \overline{C}_2 = C_2/C'_2$ é a aplicação quociente. Portanto o homomorfismo induzido $j_*\colon H_2(\mathcal{C}) \to H_2(\overline{\mathcal{C}})$ não é sobrejetivo. $\triangleright$

# 2 Homotopia algébrica

Sejam $\mathfrak{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathfrak{Y} = (Y_p, \partial_p)$ complexos de cadeias e $f, g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ morfismos entre eles. Uma *homotopia algébrica* entre $f$ e $g$ é uma seqüência de homomorfismos de $A$-módulos $D = D_p\colon X_p \to Y_{p+1}$ tais que $\partial_{p+1} D_p + D_{p-1}\partial_p = f_p - g_p$, ou simples-

mente $\partial D + D\partial = f - g \colon X_p \to Y_p$ para todo $p \geq 0$.

A principal utilidade deste conceito reside no fato de que se $f, g \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ são morfismos algebricamente homotópicos, isto é, se existe uma homotopia algébrica entre $f$ e $g$, então os homomorfismos induzidos por $f$ e $g$ nos grupos de homologia coincidem, ou seja, tem-se $f_* = g_* \colon H_p(\mathfrak{X}) \to H_p(\mathfrak{Y})$ para $p = 0, 1, 2, \ldots$

Com efeito, sabendo que $\partial Dx + D\partial x = f_p(x) - g_p(x)$ para toda $p$-cadeia $x \in C_p(\mathfrak{X})$, se $z \in Z_p(\mathfrak{X})$ é um $p$-ciclo tem-se $\partial z = 0$ logo, escrevendo $y = Dx$, resulta daí que $f_p(z) - g_p(z) = \partial y$. Assim, quando os morfismos $f$ e $g$ são algebricamente homotópicos, as imagens $f_p(z)$ e $g_p(z)$ de todo ciclo $z \in Z_p(\mathfrak{X})$ são ciclos homólogos. Logo,

$$f_*[z] = [f_p(z)] = [g_p(z)] = g_*[z],$$

portanto $f_* = g_*$.

Nos capítulos que se seguem, veremos diversas situações nas quais a noção de homotopia algébrica revelará sua utilidade.

# 3 Seqüências exatas

Uma seqüência de homomorfismos de $A$-módulos

$$\longrightarrow M_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} M_p \xrightarrow{f_p} M_{p-1} \longrightarrow \ldots$$

chama-se *exata* quando o núcleo de cada homomorfismo $f_p$ é igual à imagem do homomorfismo anterior $f_{p+1}$.

Um complexo de cadeias cujos grupos de homologia são iguais a zero em todas as dimensões é uma seqüência exata.

Numa seqüência exata, o homomorfismo $f_p$ é injetivo se, e somente se, $f_{p+1} = 0$. Por sua vez, $f_{p+1}$ é sobrejetivo se, e somente se, $f_p = 0$. Em particular, as seqüências $0 \to M \xrightarrow{f} N$ e $M \xrightarrow{g} N \to 0$ são exatas se, e somente se, $f$ é injetivo e $g$ é sobrejetivo. Portanto, a seqüência $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ é exata se, e somente se, $f$ é um isomorfismo entre os $A$-módulos $M$ e $N$.

Uma seqüência exata do tipo $0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \to 0$ chama-se *curta*. Neste caso, $i$ é injetivo, $j$ é sobrejetivo e $j^{-1}(0) = i(M)$. O exemplo típico de uma seqüência exata curta é aquele em que $M$ é um submódulo de $N$, $i\colon M \to N$ é a inclusão, $P = M/N$ é o módulo quociente e $j\colon M \to P = M/N$ é a aplicação quociente.

Um *morfismo* entre duas seqüências exatas $(M_p, f_p)$ e $(N_p, g_p)$ é uma seqüência $\varphi = (\varphi_p)$ de homomorfismos $\varphi_p\colon M_p \to N_p$ tais que $\varphi_{p-1} \circ f_p = g_p \circ \varphi_p$ para todo $p \geq 0$.

$$\begin{array}{ccc}
M_p & \xrightarrow{f_p} & M_{p-1} \\
{\scriptstyle\varphi_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{p-1}} \\
N_p & \xrightarrow{g_p} & N_{p-1}\,,
\end{array}$$

Seqüências exatas são um instrumento de uso cotidiano em Topologia Algébrica. No que se segue, ao empregá-las, nos valeremos principalmente de duas de suas propriedades, que estabeleceremos agora. Uma delas é o Lema dos Cinco e a outra é a Seqüência Exata de Homologia associada a uma seqüência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias.

**Lema dos cinco**. *Num morfismo entre seqüências exatas de A-módulos,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_5} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow \\
N_5 & \xrightarrow[g_5]{} & N_4 & \xrightarrow[g_4]{} & N_3 & \xrightarrow[g_3]{} & N_2 & \xrightarrow[g_2]{} & N_1
\end{array},$$

*se $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_4$ e $\varphi_5$ são isomorfismos então $\varphi_3$ também é um isomorfismo.*

**Demonstração:** Seja $x \in M_3$ tal que $\varphi_3 x = 0$. (Por simplicidade, escrevemos $fx$ em vez de $f(x)$.) Então $\varphi_2 f_3 x = g_3 \varphi_3 x = 0$ logo $f_3 x = 0$ (pois $\varphi_2$ é injetivo) donde $x = f_4 \bar{x}$ para algum $\bar{x} \in M_4$. Temos $g_4 \varphi_4 \bar{x} = \varphi_3 f_4 \bar{x} = \varphi_3 x = 0$, logo $\varphi_4 \bar{x} = g_5 y$, $y \in N_5$. Como $\varphi_5$ é sobrejetivo, temos $y = \varphi_5 \bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{x}} \in M_5$. Então $\varphi_4 \bar{x} = g_5 y = g_5 \varphi_5 \bar{\bar{x}} = \varphi_4 f_5 \bar{\bar{x}}$, donde $\bar{x} = f_5 \bar{\bar{x}}$ pois $\varphi_4$ é injetivo. Segue-se que $x = f_4 \bar{x} = f_4 f_5 \bar{\bar{x}} = 0$. Portanto $\varphi_3$ é injetivo. A demonstração de que $\varphi_3$ é sobrejetivo é deixada a cargo do leitor.

Em seguida, estabeleceremos a existência da seqüência exata de homologia associada a uma seqüência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias.

**Teorema 1.** *Seja* $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \to 0$ *uma seqüência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias. Existe, para cada* $p > 0$, *um homomorfismo* $\partial_* \colon H_p(\mathcal{C}'') \to H_{p-1}(\mathcal{C}')$ *tal que a seqüência*

$$\cdots \to H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \to \cdots$$

*é exata.*

**Demonstração:** Primeiro definiremos o homomorfismo $\partial_* \colon H_p(\mathcal{C}'') \to H_{p-1}(\mathcal{C})$ e depois verificaremos a exatidão da seqüência.

Dada a classe $[z''] \in H_p(\mathcal{C}'')$, existe $x \in C_p$ tal que $jx = z''$. Como $j\partial x = \partial jx = \partial z'' = 0$, segue-se que existe $z' \in C'_{p-1}$ tal que $iz' = \partial x \in C_{p-1}$. Tem-se $z' \in Z'_{p-1}$. Com efeito, $i(\partial z') = \partial i z' = \partial\partial x = 0$; sendo $i$ injetivo, resulta que $\partial z' = 0$. Põe-se então, por definição, $\partial_*[z''] = [z']$.

Devemos verificar que $\partial_*\colon H_p(\mathcal{C}'') \to H_{p-1}(\mathcal{C}')$ está bem definido, ou seja, que as escolhas de $z''$ na classe $[z'']$ e da cadeia $x$ tal que $jx = z''$ não afetam o valor de $[z'] \in H_{p-1}(\mathcal{C})$. A escolha mais geral possível em $[z'']$ seria da forma $z'' + \partial w'' = z'' + \partial jw = z'' + j\partial w$, $w \in C_{p+1}$, conseqüentemente a escolha mais geral de $x \in C_p$ seria da forma $x_1 = x + \partial w + i(y')$, $y' \in C'_p$, que daria $jx_1 = z'' + \partial w''$. Neste caso, teríamos $\partial x_1 = iz' + i\partial y' = i(z' + \partial y')$. Portanto, com as novas escolhas, teríamos ainda $\partial_*[z'' + \partial w''] = [z' + \partial y'] = [z'] = \partial_*[z'']$. Poupamo-nos (e ao leitor) da verificação de que $\partial_*$ é um homomorfismo de $A$-módulos.

A prova da exatidão da seqüência de homologia tem três etapas.

1) *Em* $H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}')$ *o núcleo de* $\partial_*$ *é igual à imagem de* $j_*$.

1a) $\partial_* \circ j_* = 0$. De fato, se $[z''] = j_*[z] = [jz]$ com $\partial z = 0$ então $\partial z = i \cdot 0$, logo $\partial_*[z''] = [\partial z] = 0$.

1b) O núcleo de $\partial_*$ está contido na imagem de $j_*$. Com efeito, se $0 = \partial_*[z''] = [z']$ então $z' = \partial w'$ para algum $w' \in C'_p$. Logo, tomando $x \in C_p$ tal que $jx = z''$ tem-se $\partial x = iz' = i\partial w' = \partial(iw')$. Daí $\partial(x - iw') = 0$. Assim $z = x - iw'$ é um ciclo em $C_p$ com $jz = jx - jiw' = jx$, donde $j_*[z] = [z'']$.

2) *Em* $H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(\mathcal{C})$ *tem-se núcleo de* $i_* =$ *imagem de* $\partial_*$.

2a) $i_*\circ\partial_* = 0$. De fato, para todo $[z''] \in H_p(\mathcal{C}'')$ tem-se $\partial_*[z''] = [z']$, onde $z' \in Z'_p$, $iz' = \partial x$ e $jx = z''$. Logo $i_*\partial_*[z''] = i_*[z'] = [iz'] = [\partial x] = 0 \in H_{p-1}(\mathcal{C})$. Logo imagem de $\partial_* \subset$ núcleo de $i_*$.

2b) Se $0 = i_*[z'] = [iz']$, $z' \in Z'_{p-1}$, então $iz' = \partial x$, $x \in C_p$. Pondo $z'' = jx$, temos $\partial_*[z''] = [z']$. Logo núcleo de $i_* \subset$ imagem de $\partial_*$.

3) *Em* $H_p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}'')$ *tem-se núcleo de* $j_* =$ *imagem de* $i_*$.

3a) Como $j_* \circ i_* = (j \circ i)_* = 0_* = 0$, vemos que imagem de $i_* \subset$ núcleo de $j_*$.

3b) Se $0 = j_*[z] = [jz]$ então existe $x'' \in C''_{p+1}$ tal que $jz = \partial x''$. Como $j$ é sobrejetivo, tem-se $x'' = jx$ para algum $x \in C_{p+1}$. Portanto $jz = \partial jx = j\partial x$, logo $j(z - \partial x) = 0$. Pela exatidão, existe $z' \in C'_p$ tal que $z - \partial x = iz'$. Ora, como $i$ é injetora e vale

$$i\partial z' = \partial iz' = \partial(z - \partial x) = \partial z - \partial\partial x = 0 - 0 = 0,$$

segue-se que $\partial z' = 0$. Assim $z' \in Z'_p$ e $i_*[z'] = [iz'] = [z - \partial x] = [z]$. Portanto núcleo de $j_* \subset$ imagem de $i_*$.

As vezes é conveniente escrever $\partial_*[z''] = [i^{-1}\partial j^{-1} z'']$. Evidentemente, $i^{-1}$ e $j^{-1}$ não são aplicações unívocas porém a classe de homologia $\partial_*[z'']$ está bem definida por esta fórmula, como acabamos de ver.

Há dois exemplos particularmente importantes de seqüências exatas de homologia. O primeiro é quando se tem um subcomplexo $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ e se toma $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}/\mathcal{C}'$. Neste caso, $i\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ é a aplicação de inclusão e $j\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ é a aplicação quociente. A seqüência exata de homologia associada à seqüência exata curta $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}/\mathcal{C}' \to 0$ chama-se a seqüência exata do par $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ e os grupos de homologia $H_p(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H_p(\mathcal{C}'')$ chamam-se os grupos de *homologia relativa* do par $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

O segundo exemplo é o da *seqüência de Mayer-Vietoris*, que desempenhará um papel central nos capítulos seguintes.

Para obter a seqüência de Mayer-Vietoris, parte-se de dois subcomplexos $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$, tais que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$, isto é, tem-se $C_p = C'_p + C''_p$ para todo $p \geq 0$. Então os $A$-módulos $C'_p \cap C''_p$, com o mesmo operador $\partial$ de $\mathcal{C}$, formam um complexo $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$. Também as somas diretas $C'_p \oplus C''_p$, cujos elementos escreveremos como pares $(x', x'')$ com $x' \in C'_p$ e $x'' \in C''_p$, munidas do operador $\partial\colon C'_p \oplus C''_p \to C'_{p-1} \oplus C''_{p-1}$, dado por $\partial(x', x'') = (\partial x', \partial x'')$, formam o complexo $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$, cujos grupos de homologia são $H_p(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') \approx H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'')$ como facilmente se verifica.

Os morfismos $i\colon \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$ e $j\colon \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}$, dados por $i(x) = (x, x)$ e $j(x, y) = x - y$, compõem a seqüência curta

$$0 \to \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{j} \mathcal{C} \to 0,$$

que é exata como se vê imediatamente. Dela resulta a seqüência exata de homologia

$$\cdots \to H_p(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \xrightarrow{i_*} H_p(\mathcal{C}') \oplus H_p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{j_*} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'') \to \cdots$$

chamada a *seqüência de Mayer-Vietoris* do terno $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}'')$. Nela, usamos a notação $\Delta$ em vez de $\partial_*$. Os homomorfismos $i_*$e $j_*$ são óbvios: $i_*[z] = ([z], [z])$ e $j_*([z], [w]) = [z - w]$. Quanto a $\Delta$, tem-se $\Delta[z] = [\partial x] = [\partial y]$ onde $x - y = z$, $x \in C'_p$, $y \in C''_p$ e $\partial x = \partial y$.

A seqüência exata de homologia é natural, no sentido seguinte. Dado um morfismo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathfrak{X}' & \xrightarrow{i} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{X}'' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\varphi'} & & \downarrow{\varphi} & & \downarrow{\varphi''} & & \\
0 \to \mathfrak{Y}' & \xrightarrow{i} & \mathfrak{Y} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{Y}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

entre duas seqüências exatas curtas de complexos de cadeias, os homomorfismos induzidos em homologia por $\varphi$, $\varphi'$ e $\varphi''$ determinam um morfismo entre as seqüências exatas de homologia. Noutras palavras, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to H_p(\mathfrak{X}') & \xrightarrow{i_*} & H_p(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{j_*} & H_p(\mathfrak{X}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathfrak{X}') \to \cdots \\
\downarrow{\varphi'_*} & & \downarrow{\varphi_*} & & \downarrow{\varphi''_*} & & \downarrow{\varphi'_*} \\
\cdots \to H_p(\mathfrak{Y}') & \xrightarrow{i_*} & H_p(\mathfrak{Y}) & \xrightarrow{j_*} & H_p(\mathfrak{Y}'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(\mathfrak{Y}') \to \cdots
\end{array}$$

Pelo morfismo entre as duas seqüências curtas, temos $\varphi \circ i = i \circ \varphi'$ e $\varphi'' \circ j = j \circ \varphi$, donde $\varphi_* \circ i_* = i_* \circ \varphi'_*$ e $\varphi''_* \circ j_* = j_* \circ \varphi_*$. Para

provar que $\varphi'_* \circ \partial_* = \partial_* \circ \varphi''_*$, escreveremos $\partial_*[z''] = [i^{-1}\partial j^{-1}z'']$. Então

$$\begin{aligned}\varphi'_*\partial_*[z''] &= \varphi'_*[i^{-1}\partial j^{-1}z''] = [\varphi' i^{-1}\partial j^{-1}z''] = [i^{-1}\varphi\partial j^{-1}z''] \\ &= [i^{-1}\partial\varphi j^{-1}z''] = [i^{-1}\partial j^{-1}\varphi'' z''] = \partial_*\varphi''_*[z''].\end{aligned}$$

Resulta daí a naturalidade da seqüência de Mayer Vietoris: se $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}''$ e $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}' + \mathfrak{Y}''$ então um morfismo $\varphi\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ tal que $\varphi(\mathfrak{X}') \subset \mathfrak{Y}'$ e $\varphi(\mathfrak{X}'') \subset \mathfrak{Y}''$ induz um morfismo entre as seqüências de Mayer-Vietoris de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \mathfrak{X}'')$ e $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{Y}'')$.

# 4 Cohomologia

Um *complexo de cocadeias* é uma seqüência $\mathcal{C} = (C^p, \delta_p)$, $p \geq 0$, de $A$-módulos $C^p$ e homomorfismos $\delta_p\colon C^p \to C^{p+1}$ tais que $\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$. Freqüentemente escreve-se simplesmente $\delta$ em vez de $\delta_p$:

$$C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \cdots \to C^{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}} C^p \xrightarrow{\delta_p} C^{p+1} \to \cdots.$$

Cada elemento $u \in C^p$ chama-se uma *cocadeia* de dimensão $p$, ou uma $p$-cocadeia. Se $\delta_p u = 0$, diz-se que $u$ é um $p$-*cociclo*. O conjunto $Z^p = Z^p(\mathcal{C})$ dos $p$-cociclos é um submódulo de $C^p$, núcleo do homomorfismo $\delta_p$. A imagem $B^p$ do operador $\delta_{p-1}$ também é um submódulo de $C^p$ e a relação $\delta \circ \delta = 0$ significa que $B^p \subset Z^p$. O módulo quociente $H^p(\mathcal{C}) = Z^p/B^p$ chama-se o *grupo de cohomologia de dimensão* $p$ do complexo $\mathcal{C}$. Seus elementos são as *classes de cohomologia* $[u] = \{u + \delta v; v \in C^{p-1}\}$ dos cociclos $u \in Z^p$. Tem-se $[u] = [u']$ se, e somente se, $u - u' = \delta v$ para algum $v \in C^{p-1}$. Neste caso, diz-se que $u$ e $u'$ são *cociclos cohomólogos.*

As noções e os fatos relativos a cohomologia são análogos àqueles já estabelecidos para a homologia, levando-se em conta apenas que o operador cobordo $\delta\colon C^{p-1} \to C^p$ aumenta a dimensão, enquanto

que o operador bordo $\partial\colon C^p \to C^{p-1}$ diminui. Isto causa pequenas mudanças.

Por exemplo, se $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ são complexos de cocadeias, o homomorfismo induzido em cohomologia por um morfismo $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre complexos de cocadeias é designado por $f^*\colon H^p(\mathfrak{X}) \to H^p(\mathfrak{Y})$ em vez de $f_*$.

Uma homotopia algébrica entre os morfismos $f, g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ é uma seqüência de homomorfismos $D\colon X^p \to Y^{p-1}$ tal que $\delta D + D\delta = f - g$. (No caso de cadeias, tínhamos $D\colon X_p \to Y_{p+1}$.) Novamente, é claro que se $f, g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ são algebricamente homotópicos os homomorfismos induzidos $f^*, g^*\colon H^p(\mathfrak{X}) \to H^p(\mathfrak{Y})$ são iguais.

Finalmente, a seqüência exata de cohomologia determinada pela seqüência exata curta $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \to 0$ de morfismos entre complexos de cocadeias tem a forma

$$\cdots \to H^p(\mathcal{C}') \xrightarrow{i^*} H^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{j^*} H^p(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(\mathcal{C}') \to \dots .$$

Um importante exemplo de complexo de cocadeias se obtém a partir de um complexo de cadeias $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$, formado por $A$-módulos. Para cada $p \geq 0$, pomos $C^p = \operatorname{Hom}(C_p; A) =$ módulo dual de $C_p$, cujos elementos são os homomorfismos $u\colon C_p \to A$. O operador $\delta = \delta_p\colon C^p \to C^{p+1}$ é o adjunto de $\partial\colon C_{p+1} \to C_p$, ou seja, se $u \in C^p$ então $\delta u \in C^{p+1}$ é o homomorfismo (funcional $A$-linear) definido por $(\delta u)\cdot x = u(\partial x)$ para toda cadeia $x \in C_{p+1}$. Isto nos dá o complexo de cocadeias $\mathcal{C}^* = (C^p, \delta_p)$, cujos grupos de cohomologia $H^p(\mathcal{C})$ são chamados os *grupos de cohomologia do complexo de cadeias* $\mathcal{C}$.

A todo morfismo $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre complexos de cadeias corresponde o morfismo adjunto $f^{\mathsf{T}}\colon \mathfrak{Y}^* \to \mathfrak{X}^*$.

Para cada $p \geq 0$, $f_p^{\mathsf{T}}\colon Y^p \to X^p$ é definido por

$$\left(f_p^{\mathsf{T}}\, v\right)\cdot x = v\cdot f_p(x),\ v \in Y^p,\ x \in X_p .$$

Noutras palavras, $f_p^{\mathsf{T}} v = v \circ f_p$.

O homomorfismo em cohomologia induzido pelo morfismo original $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ é $f^*\colon H^p(\mathfrak{Y}) \to H^p(\mathfrak{X})$, $f^* = (f^\intercal)_*$, ou seja, $f^*[v] = [f^\intercal v]$ para todo $p$-cociclo $v \in Z^p(\mathfrak{Y})$. Se $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ é outro morfismo de cadeias, tem-se $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^p(\mathfrak{Z}) \to H^p(\mathfrak{X})$.

No contexto da cohomologia obtida a partir de um complexo de cadeias, deve-se observar que dada a seqüência de $A$-módulos e transformações $A$-lineares

$$\ldots \longrightarrow M_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} M_p \xrightarrow{f_p} M_{p-1} \longrightarrow \ldots ,$$

se ela é exata, não se segue geralmente que seja também exata a *seqüência dual*

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(M_{p-1}; A) \xrightarrow{f_p^\intercal} \mathrm{Hom}(M_p; A) \xrightarrow{f_{p+1}^\intercal} \mathrm{Hom}(M_{p+1}; A) \longrightarrow \cdots ,$$

na qual $f_p^\intercal$ é o homomorfismo adjunto de $f_p$.

Um exemplo simples é o da seqüência exata de grupos ($\mathbb{Z}$-módulos) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$, onde $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ é o grupo dos inteiros módulo 2, $f(n) = 2n$ e $g$ é a projeção canônica: $g(n) = 0$ se $n$ é par e $g(n) = 1$ se $n$ é ímpar. A seqüência dual é

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g^\intercal} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^\intercal} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \to 0.$$

O grupo $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ é zero e $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ é cíclico infinito (isomorfo a $\mathbb{Z}$), gerado pelo homomorfismo identidade $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Como $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é a multiplicação por 2, o mesmo se dá com $f^\intercal\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$, logo $f^\intercal$ não é sobrejetivo e a seqüência não é exata.

De um modo geral, se a seqüência de $A$-módulos $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ é exata então $g \circ f = 0$ de modo que, considerando a seqüência dual

$$\mathrm{Hom}(M_3; A) \xrightarrow{g^\intercal} \mathrm{Hom}(M_2; A) \xrightarrow{f^\intercal} \mathrm{Hom}(M_1; A)$$

temos $f^\intercal \circ g^\intercal = (g \circ f)^\intercal = 0$, logo $Im(g^\intercal) \subset \mathcal{N}(f^\intercal)$. Se quisermos mostrar que esta seqüência também é exata, restará provar que

$\mathcal{N}(f^{\intercal}) \subset Im(g^{\intercal})$. Para isto, tomamos $v \in \text{Hom}(M_2; A)$ tal que $f^{\intercal}(v) = 0$ e procuramos achar $u \in \text{Hom}(M_3; A)$ com $g^{\intercal}(u) = v$. Nossa hipótese sobre $v$ significa que $v(f(x)) = 0$ para todo $x \in M_1$, ou seja, que o homomorfismo $v \colon M_2 \to A$ se anula sobre a imagem de $f$. Pela exatidão da seqüência inicial, essa imagem coincide com o núcleo de $g$. Portanto $v(y) = 0$ para todo $y \in M_2$ tal que $g(y) = 0$. Ou ainda: se $y, y' \in M_2$ são tais que $g(y) = g(y')$ então $v(y) = v(y')$. Ora, estamos em procura de um homomorfismo $u \colon M_3 \to A$ tal que $u(g(y)) = v(y)$ para todo $y \in M_2$. Acabamos de ver que esta igualdade define univocamente um homomorfismo $u \colon \text{Im}(g) \to A$. Se este homomorfismo puder ser estendido a todo o $M_3$, (não importa de que modo) teremos $g^{\intercal}(u) = v$.

Assim, o problema de saber se a dual da seqüência exata de $A$-módulos $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ é ainda exata reduz-se a indagar se um homomorfismo definido no submódulo $g(M_2) \subset M_3$ pode ser estendido a todo o módulo $M_3$. Nem sempre isto é possível. Por exemplo, se $P \subset \mathbb{Z}$ é o subgrupo formado pelos inteiros pares, o homomorfismo $h \colon P \to \mathbb{Z}$, definido por $h(2n) = n$, não pode ser estendido a todo o grupo $\mathbb{Z}$.

Na seqüência exata $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ há um caso em que todo homomorfismo $h \colon g(M_2) \to P$, definido no submódulo $g(M_2) \subset M_3$, pode ser estendido a um homomorfismo $\overline{h} \colon M_3 \to P$, definido em todo o módulo $M_3$. É quando existe um submódulo $N \subset M_3$ tal que $M_3 = g(M_2) \oplus N$. Então define-se a extensão simplesmente fazendo-a assumir o valor zero em cada $y \in N$, lembrando que os elementos de $M_3$ se escrevem de modo único como $x + y$ com $x \in g(M_2)$ e $y \in N$.

Uma seqüência exata $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ chama-se *separável* quando existe um submódulo $N \subset M_2$ tal que $M_2 = f(M_1) \oplus N$.

No caso de uma seqüência exata curta, como

$$(*) \qquad 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0,$$

dizer que ela é separável significa que existe um submódulo $N \subset M_2$ tal que $M_2 = f(M_1) \oplus N$. Neste caso, a seqüência dada é *equivalente* a

$$(**) \qquad 0 \to M_1 \xrightarrow{f'} M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{g'} M_3 \to 0,$$

onde $f'(x) = (x, 0)$ e $g'(x, y) = y$, ou seja, existe um isomorfismo $h \colon M_2 \to M_1 \oplus M_3$ que torna comutativo o diagrama

Com efeito, sendo $f \colon M_1 \to f(M_1)$ um isomorfismo e sabendo que todo $z \in M_2$ se escreve, de modo único, como $z = x + y$, onde $x \in f(M_1)$, isto é, $g(x) = 0$, e $y \in N$, pomos $h(z) = h(x + y) = (f^{-1}(x), g(y))$. O homomorfismo $h$, assim definido, cumpre $h \circ f = f'$ e $g' \circ h = g$, ou seja, torna comutativo o diagrama acima. A verificação de que $h$ é bijetivo recai imediatamente na exatidão da seqüência (*) dada inicialmente.

Portanto (**) é o modelo padrão de uma seqüência exata curta separável.

**Lema 1.** *Se a imagem $g(M_2)$ é um módulo livre (em particular, se $A$ é um corpo, logo os $A$-módulos são espaços vetoriais) então a seqüência exata $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ é separável. Em particular, se o módulo $M_3$ é livre então a seqüência exata curta*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

*é separável.*

**Demonstração:** Seja $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma base do $A$-módulo $g(M_2)$. Definamos um homomorfismo $\varphi\colon g(M_2) \to M_2$ escolhendo, para cada $\lambda \in L$, um elemento $\varphi(a_\lambda) \in M_2$ tal que $g(\varphi(a_\lambda)) = a_\lambda$. Assim $g(\varphi(z)) = z$ para todo $z \in g(M_2)$. Seja $N$ a imagem de $\varphi$. Afirmamos que $M_2 = f(M_1) \oplus N$. De fato, em primeiro lugar, todo $x \in M_2$ se escreve como $x = \varphi(g(x)) + (x - \varphi(g(x)))$, com $\varphi(g(x)) \in N$ e $g(x-\varphi(g(x))) = g(x)-g(\varphi(g(x))) = g(x)-g(x) = 0$, logo $x - \varphi(g(x)) \in f(M_1)$ por exatidão. Em segundo lugar, se $y \in f(M_1) \cap N$ então $y = f(x)$, $x \in M_1$, e $y = \varphi(z)$, $z \in g(M_2)$, logo $z = g(\varphi(z)) = g(y) = g(f(x)) = 0$ e daí $y = \varphi(z) = \varphi(0) = 0$.

Um importante caso particular deste lema é o

**Corolário 1.** *Seja $C \subset B$ um submódulo. Se o módulo quociente $B/C$ é livre então $C$ é um somando direto em $B$, isto é, existe um submódulo $C' \subset B$ tal que $B = C \oplus C'$.*

Com efeito, se $i\colon C \to B$ é a inclusão e $j\colon B \to B/C$ é a projeção natural então a seqüência $0 \to C \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} B/C \to 0$ é exata.

**Teorema 2.** *Se $M_3$ é um $A$-módulo livre (em particular, se $A$ é um corpo) e a seqüência $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ é exata, então a seqüência dual*

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3; A) \xrightarrow{g^\top} \mathrm{Hom}(M_2; A) \xrightarrow{f^\top} \mathrm{Hom}(M_1; A) \to 0$$

*é exata.*

**Demonstração:**

(1) $g^\top$ *é injetivo*: Seja $u\colon M_3 \to A$ um homomorfismo tal que $g^\top(u) = 0$, isto é, $u(g(x)) = 0$ para todo $x \in M_2$. Como $g$ é sobrejetivo, isto significa que $u = 0$.

(2) $\mathrm{Im}(g^\top) = \mathcal{N}(f^\top)$. São duas inclusões a serem verificadas. A primeira, $\mathrm{Im}(g^\top) \subset \mathcal{N}(f^\top)$, significa que $f^\top \circ g^\top = 0$, o que é claro porque $f^\top \circ g^\top = (g \circ f)^\top = 0$ pois $g \circ f = 0$. Para provar que $\mathcal{N}(f^\top) \subset \mathrm{Im}(g^\top)$, tomemos um homomorfismo $v\colon M_2 \to A$ tal

que $f^{\top}(v) = 0$, ou seja, $v \circ f = 0$. Como $g$ é sobrejetivo, podemos definir o homomorfismo $u\colon M_3 \to A$ pondo $u(g(x)) = v(x)$ para todo $x \in M_2$. Esta definição é legítima pois se $y \in M_2$ é tal que $g(y) = g(x)$ então $g(x - y) = 0$ e daí, pela exatidão da seqüência inicial, existe $z \in M_1$ tal que $x - y = f(z)$. Como $v \circ f = 0$, vemos que $v(x-y) = v(f(z)) = 0$, portanto $v(x) = v(y)$, mostrando assim que o homomorfismo $u\colon M_3 \to A$ está bem definido, sendo claro que $u \circ g = v$, isto é, $v = g^{\top}(u)$.

(3) *$f^{\top}$ é sobrejetivo.* Aqui fazemos uso do Lema 1, segundo o qual a seqüência exata $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ é separável, logo é equivalente à seqüência exata padrão $0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_3 \to M_3 \to 0$ e a sobrejetividade de $f^{\top}$ equivale a dizer que todo homomorfismo $u\colon M_3 \to A$ se estende a um homomorfismo $\overline{u}\colon M_1 \oplus M_3 \to A$, o que é inteiramente óbvio.

**Observação:** Se $E$ é um espaço vetorial sobre o corpo $K$, é praxe escrever $E^*$ em vez de $\mathrm{Hom}(E; K)$.

# 5 Limites indutivos

Uma *quase-ordem* num conjunto $L$ é uma relação binária $\leq$ em $L$ que é reflexiva ($\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in L$) e transitiva (se $\lambda, \mu, \nu \in L$ são tais que $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \nu$ então $\lambda \leq \nu$). Uma quase-ordem anti-simétrica ($\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \lambda$ implicam $\lambda = \mu$) chama-se uma relação de *ordem*.

Diz-se que a quase-ordem $\leq$ é *filtrante* quando, dados quaisquer $\lambda, \mu \in L$, existe $\nu \in L$ tal que $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.

**Exemplo 3.** Seja $L$ o conjunto dos intervalos abertos da reta que contêm 0 e têm comprimento $\leq 1$. Dados $I, J \in L$, se escrevermos $I \leq J$ para significar $I \subset J$, obteremos uma relação de ordem em $L$, a qual não é filtrante. Se, entretanto, convencionarmos que $I \leq J$ significa $J \subset I$, obteremos uma relação de ordem filtrante em $L$.

**Exemplo 4.** Seja $\mathcal{V}$ o conjunto das vizinhanças abertas de um determinado conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Dados $U, V \in \mathcal{V}$, escrevendo $U \leq V$ para significar que $X \subset V \subset U$, obtemos uma relação de ordem filtrante em $\mathcal{V}$. A opção de escrever $U \leq V$ quando $V \subset U$ traduz o fato de que $V$ está mais próxima de $X$ do que $U$, ou que é uma melhor aproximação aberta de $X$.

**Exemplo 5.** Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das coberturas abertas de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Dadas as coberturas $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, ponhamos $\alpha \leq \beta$ para exprimir que $\beta$ refina $\alpha$, isto é, para cada $B \in \beta$ existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$. A relação $\alpha \leq \beta$ é uma quase-ordem filtrante em $\mathcal{C}$. Com efeito, dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, o conjunto $\gamma$ das interseções $A \cap B$, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, é uma cobertura aberta de $X$ que refina $\alpha$ e $\beta$, ou seja, tem-se $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$. Note que esta quase-ordem não é anti-simétrica, ou seja, não é uma ordem.

Dada uma quase-ordem $\leq$ no conjunto $L$, um subconjunto $L' \subset L$ diz-se *cofinal* quando, para todo $\lambda \in L$, existe $\mu \in L'$ tal que $\lambda \leq \mu$.

**Exemplo 6.** No Exemplo 3, se $I \leq J$ significa $I \subset J$, os intervalos com extremos racionais formam um conjunto cofinal. Se $I \leq J$ quer dizer $J \subset I$ então os intervalos do tipo $(-1/n, 1/n)$ constituem um conjunto cofinal. No Exemplo 4, se $X$ for compacto, as vizinhanças abertas de $X$ que têm fecho compacto formam um conjunto cofinal em $\mathcal{V}$. No Exemplo 5, se $X$ é uma superfície, o conjunto das coberturas abertas localmente finitas é cofinal em $\mathcal{C}$.

Uma família $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ de $A$-módulos chama-se um *sistema indutivo* quando

1º) O conjunto $L$ dos índices é munido de uma quase-ordem filtrante.

2º) Para cada par de índices $\lambda, \mu \in L$ com $\lambda \leq \mu$ é dado um homomorfismo $\varphi_{\lambda\mu} \colon E_\lambda \to E_\mu$ de modo que $\varphi_{\lambda\lambda} = \mathrm{id} \colon E_\lambda \to E_\lambda$ e $\varphi_{\mu\nu} \circ \varphi_{\lambda\mu} = \varphi_{\lambda\nu} \colon E_\lambda \to E_\nu$ se $\lambda \leq \mu \leq \nu$.

Dado o sistema indutivo $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$, definimos na reunião disjunta $\bigvee_{\lambda\in L} E_\lambda$ uma relação de equivalência dizendo que $x \in E_\lambda$ é equivalente a $y \in E_\mu$ quando existe $\nu \in L_\nu$, com $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$, tal que $\varphi_{\lambda\nu}(x) = \varphi_{\mu\nu}(y)$. Indicaremos com $\overset{\vee}{x}$ a classe de equivalência do elemento $x \in E_\lambda$ segundo esta relação. O conjunto $E$ das classes de equivalência $\overset{\vee}{x}$ dos elementos $x \in E_\lambda$, $\lambda \in L$, chama-se o *limite indutivo* do sistema $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$. Escreve-se $E = \varinjlim_\lambda E_\lambda$.

Quando se escreve um elemento de $E = \varinjlim_\lambda E_\lambda$ sob a forma $\overset{\vee}{x}$, diz-se que $x \in E_\lambda$ representa a classe $\overset{\vee}{x}$. Se $\lambda \leq \mu$ e $y = \varphi_{\lambda\mu}(x)$, então o elemento $y \in E_\lambda$ representa a mesma classe, pois $\overset{\vee}{x} = \overset{\vee}{y}$.

O limite indutivo $E = \varinjlim_\lambda E_\lambda$ possui uma estrutura natural de $A$-módulo: dados $\overset{\vee}{x} = \overset{\vee}{y} \in E$, como $L$ é filtrante, podemos supor que os representantes $x$, $y$ pertencem ao mesmo módulo $E_\lambda$ e então pomos $\overset{\vee}{x} + \overset{\vee}{y} = (x+y)^\vee$ e, se $a \in A$, $a \cdot \overset{\vee}{x} = (a \cdot x)^\vee$. Não há dificuldade em verificar que estas operações estão bem definidas e fazem de $E = \varinjlim_\lambda E_\lambda$ um $A$-módulo.

Em particular, a classe $\overset{\vee}{x}$ de $x \in E_\lambda$ é o zero de $A$-módulo $E$, se, e somente se, existe $\mu \geq \lambda$ tal que $\varphi_{\lambda\mu}(x) = 0 \in E_\mu$. Noutras palavras, o elemento neutro da adição em $E = \varinjlim_\lambda E_\lambda$ pode ser representado pelo elemento neutro $0 \in E_\mu$ para algum $\mu \in L$.

Seja $E = \varinjlim E_\lambda$. Para cada $\lambda \in L$, existe um homomorfismo $\varphi_\lambda \colon E_\lambda \to E$, definido por $\varphi_\lambda(x) = \overset{\vee}{x}$, $x \in E_\lambda$. Valem as seguintes propriedades:

a) Se $\lambda \leq \mu$ então $\varphi_\lambda = \varphi_\mu \circ \varphi_{\lambda\mu}$;

b) $E = \bigcup_{\lambda\in L} \varphi_\lambda(E_\lambda)$;

c) Se $x \in E_\lambda$ é tal que $\varphi_\lambda(x) = 0$ então existe $\mu \in L$ tal que $\lambda \leq \mu$ e $\varphi_{\lambda\mu}(x) = 0$.

Podemos também considerar sistemas indutivos de complexos. Para fixar idéias, vejamos um sistema indutivo $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in L}$ de com-

plexos de cocadeias. Para cada $\lambda \in L$, temos um complexo

$$\mathcal{C}_\lambda \colon C^0_\lambda \longrightarrow C^1_\lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^r_\lambda \xrightarrow{d_\lambda} C^{r+1}_\lambda \longrightarrow \cdots$$

e, quando $\lambda \leq \mu$, um morfismo $f_{\lambda\mu} \colon \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_\mu$ tal que $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{id} \colon \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_\lambda$ e $f_{\lambda\nu} = f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} \colon \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_\nu$ quando $\lambda \leq \mu \leq \nu$.

O limite indutivo do sistema $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ é o complexo

$$\mathcal{C} \colon C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^r \xrightarrow{d} C^{r+1} \longrightarrow \cdots ,$$

onde $C^r = \varinjlim_\lambda C^r_\lambda$ e $d \colon C^r \to C^{r+1}$ é definido por $d(\overset{\vee}{x}) = (dx)^\vee$, com $x \in C^r_\lambda$ logo $dx \in C^{r+1}_\lambda$.

Escreve-se $\mathcal{C} = \varinjlim_{\lambda \in L} \mathcal{C}_\lambda = \varinjlim \mathcal{C}_\lambda$.

Se $E = \varinjlim_{\lambda \in L} E_\lambda$, definir um homomorfismo $f \colon E \to F$, com valores no $A$-módulo $F$, equivale a definir, para cada $\lambda \in L$, um homomorfismo $f_\lambda \colon E_\lambda \to F$ de tal modo que valha a relação $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\lambda\mu}$ sempre que $\lambda \leq \mu$. Com efeito, dado $f$, obtém-se $f_\lambda$ pondo $f_\lambda = f \circ \varphi_\lambda$. Reciprocamente, dados os $f_\lambda$, definimos $f$ assim: para cada $x \in E$ existe algum $x_\lambda \in E_\lambda$ tal que $\varphi_\lambda(x_\lambda) = x$. Então pomos $f(x) = f_\lambda(x_\lambda)$. A relação $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\lambda\mu}$ mostra que esta definição é legítima, isto é, que a escolha de $x_\lambda$ não afeta o valor $f(x)$.

O homomorfismo $f \colon \varinjlim E_\lambda \to F$, definido a partir dos $f_\lambda \colon E_\lambda \to F$, é sobrejetivo se, e somente se, $F = \cup f_\lambda(E_\lambda)$ e é injetivo se, e somente se, $f_\lambda(x) = 0$ implica que existe $\mu \geq \lambda$ tal que $\varphi_{\lambda\mu}(x) = 0$.

Por exemplo, se $L' \subset L$ é um subconjunto cofinal, o limite indutivo $E' = \varinjlim_{\lambda' \in L'} E_{\lambda'}$ é isomorfo a $E = \varinjlim_{\lambda \in L} E_\lambda$. Para chegar a esta conclusão, definimos o homomorfismo $f \colon E' \to E$ pondo, para cada $\lambda' \in L'$, $f_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'} \colon E_{\lambda'} \to E$. Como se vê sem dificuldade, o homomorfismo $f$ é sobrejetivo e injetivo, logo é um isomorfismo entre $E'$ e $E$.

Um exemplo útil de isomorfismo é o seguinte. A partir de um sistema indutivo $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ de complexos de cocadeias, obtemos um

complexo $\mathcal{C} = \lim \mathcal{C}_\lambda$ , o qual possui grupos de cohomologia $H^r(\mathcal{C}) = H^r(\lim \mathcal{C}_\lambda)$, $r = 0, 1, \ldots$ . Por sua vez, para cada $r = 0, 1, 2, \ldots$, os grupos de cohomologia $H^r(\mathcal{C}_\lambda)$, $\lambda \in L$ formam um sistema indutivo, o qual possui o limite $\lim_\lambda H^r(\mathcal{C}_\lambda)$. Afirmamos que existe um isomorfismo natural $f \colon \lim_\lambda H^r(\mathcal{C}_\lambda) \to H^r(\lim_\lambda \mathcal{C}_\lambda)$. Afim de definir $f$, basta considerar, para cada $\lambda \in L$, o homomorfismo $f_\lambda \colon H^r(\mathcal{C}_\lambda) \to H^r(\lim_\lambda \mathcal{C}_\lambda)$, definido por $f_\lambda[z] = [\overset{\vee}{z}]$, onde $z \in C^r_\lambda$ é um cociclo de dimensão $r$, $[z] \in H^r(\mathcal{C}_\lambda)$ é sua classe de cohomologia e $\overset{\vee}{z} = \varphi_\lambda(z)$ é sua imagem em $\lim_\lambda C^r_\lambda$ pelo homomorfismo natural $\varphi_\lambda \colon C^r_\lambda \to \lim_\lambda C^r_\lambda$. Os homomorfismos $f_\lambda$ cumprem obviamente a condição $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\lambda\mu}$ quando $\lambda \leq \mu$, logo determinam um homomorfismo $f \colon \lim_\lambda H^r(\mathcal{C}_\lambda) \to H^r(\lim_\lambda \mathcal{C}_\lambda)$. Como se vê sem dificuldade, $f$ é um isomorfismo.

Assim, o processo de tomar o limite indutivo de complexos comuta com o de tomar grupo de cohomologia. Resulta daí, em particular, que o limite indutivo de um sistema de seqüências exatas é ainda uma seqüência exata pois esta é, em última análise, um complexo cujos grupos de cohomologia em dimensão $> 0$ são nulos.

# Capítulo II

# Cohomologia de deRham

A cohomologia de deRham será nosso primeiro exemplo de uma situação específica na qual se usam os conceitos gerais expostos no capítulo anterior.

Este assunto é geralmente apresentado no contexto aparentemente mais geral de variedades diferenciáveis. (Em vez de superfícies no espaço euclidiano, como faremos aqui.) A opção que fizemos permite utilizar, sem mudança de terminologia ou notação, as noções já introduzidas e os resultados já demonstrados em [AR2] e, principalmente, [AR3], textos que contêm os pré-requisitos para este capítulo.

Além disso, como é bem conhecido, toda variedade diferenciável é difeomorfa a uma superfície contida num espaço euclidiano de dimensão suficientemente alta, portanto não há perda essencial de generalidade em nossa exposição. Uma vantagem adicional das superfícies é a existência da vizinhança tubular, cuja utilização em ocasiões oportunas simplifica argumentos e permite demonstrações convincentes, como vimos nos Capítulos 4 e 5 de [AR3].

**Advertência**: no que se segue, salvo menção explícita em contrário, superfícies e formas serão sempre supostas diferenciáveis e *diferenciável* significa "de classe $C^\infty$."

# 1 O complexo de deRham

A diferenciação exterior $d\colon \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ é uma transformação linear definida no espaço vetorial $\Lambda^r(M)$, cujos elementos são as $r$-formas na superfície $m$-dimensional $M$. Como $dd\omega = 0$ para toda $\omega \in \Lambda^r(M)$, a seqüência

$$\Lambda^*(M)\colon \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \to \cdots \to \Lambda^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^m(M) \to 0$$

é um complexo de cocadeias, chamado o *complexo de deRham* da superfície $M$.

Lembremos que $\Lambda^0(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis $f\colon M \to \mathbb{R}$ e $\Lambda^r(M) = 0$ se $r > m = \dim M$.

O núcleo $Z^r(M)$ de $d\colon \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ e a imagem $B^r(M)$ de $d\colon \Lambda^{r-1}(M) \to \Lambda^r(M)$ são, respectivamente, o conjunto das $r$-formas *fechadas* e das $r$-formas *exatas*. Tem-se $B^r(M) \subset Z^r(M)$ e o espaço quociente

$$H^r(M) = Z^r(M)\big/B^r(M)$$

chama-se o *grupo de cohomologia de deRham* da superfície $M$ em dimensão $r$ (muito embora seja um espaço vetorial). Seus elementos são as *classes de cohomologia*

$$[\omega] = \{\omega + d\alpha;\ \alpha \in \Lambda^{r-1}(M)\}$$

das formas fechadas $\omega \in Z^r(M)$.

**Exemplo 1**. O caso mais simples da cohomologia de deRham é $H^0(M)$. Tem-se $B^0(M) = 0$ e $Z^0(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis $f\colon M \to \mathbb{R}$ tais que $df = 0$. Logo $H^0(M) = Z^0(M) =$ conjunto das funções localmente constantes, ou seja, constantes em cada componente conexa de $M$. Em particular, se $M$ é conexa então $H^0(M) = \mathbb{R}$. No caso geral, em que $M = \bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda$ é a reunião de suas componentes conexas, tem-se $H^0(M) = \prod_{\lambda \in L} \mathbb{R}_\lambda$ onde $\mathbb{R}_\lambda = \mathbb{R}$

para todo $\lambda \in L$. Explicitamente, cada elemento de $H_0(M)$ é uma família $x = (x_\lambda)_{\lambda \in L}$ onde $x_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. (Note que $L$ é enumerável.) Se $M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$ possui apenas um número finito $k$ de componentes conexas então $H^0(M) = \mathbb{R}^k$. $\triangleright$

**Exemplo 2**. Seja $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Sabemos que $H^0(M) = \mathbb{R}$ pois $M$ é conexa. Vejamos $H^1(M)$. A cada forma fechada $\omega = adx + bdy$ em $M$, façamos corresponder o número $\varphi(\omega) = \int_{S^1} \omega$. A correspondência $\varphi\colon Z^1(M) \to \mathbb{R}$ assim definida é uma transformação linear não-nula, portanto sobrejetiva. Seu núcleo contém $B^1(M)$ pois a integral de uma forma exata ao longo do caminho fechado $S^1$ é zero. Logo duas formas cohomólogas $\omega$ e $\bar{\omega}$ têm a mesma imagem $\varphi(\omega) = \varphi(\bar{\omega})$. Então, por passagem ao quociente, podemos definir uma transformação linear $\tilde{\varphi}\colon H^1(M) \to \mathbb{R}$, pondo $\tilde{\varphi}([\omega]) = \varphi(\omega)$ para toda $\omega \in Z^1(M)$. Além de sobrejetiva, $\tilde{\varphi}$ é também injetiva. De fato, se $\tilde{\varphi}([\omega]) = \int_{S^1} \omega = 0$, afirmamos que $\int_\gamma \omega = 0$ para qualquer caminho fechado $\gamma$ em $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para ver isto lembremos que, como está no Capítulo 1 de [AR3], $\gamma$ é livremente homotópico em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a um caminho do tipo $\eta\colon [0, 2\pi] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\eta(s) = (\cos ks, \operatorname{sen} ks)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, $\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = k \cdot \int_{S^1} \omega = 0$. Portanto $\omega$ é exata em $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, ou seja, $[\omega] = 0$. Finalmente, tem-se ainda $H^2(M) = 0$ pois, como veremos logo a seguir, os grupos de cohomologia de deRham são invariantes homotópicos e $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia da "superfície" unidimensional $S^1$, para a qual, evidentemente, vale $H^2(S^1) = 0$. $\triangleright$

## 2 Invariância homotópica

Como sabemos, uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ entre as superfícies $M$, $N$ induz, para cada $r \geq 0$, uma transformação linear $f^*\colon \Lambda^r(N) \to \Lambda^r(M)$, que associa a cada $r$-forma $\omega$ em $N$ o

seu *pullback* $f^*\omega \in \Lambda^r(M)$, onde

$$(f^*\omega)(p)\cdot(v_1, \ldots, v_r) = \omega(f(p))\cdot(f'(p)\cdot v_1, \ldots, f'(p)\cdot v_r),$$

para todo $p \in M$ e quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in T_pM$.

É uma propriedade essencial da diferenciação exterior sua invariância por mudança de coordenadas, expressa pela igualdade $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, em virtude da qual $f^*$ é um morfismo do complexo de deRham $\Lambda^*(N)$ em $\Lambda^*(M)$. Como tal, $f^*$ induz, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo

$$f^*\colon H^r(N) \to H^r(M),$$

indicado com a mesma notação $f^*$. Quando há necessidade de ser mais preciso, escreve-se $f_r^*$ em vez de $f^*$. O homomorfismo acima, definido por $f^*([\omega]) = [f^*\omega]$, é *natural* no sentido de que se tem $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ para $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ diferenciáveis. Em particular, se $f\colon M \to N$ é um difeomorfismo e $g\colon N \to M$ é seu inverso então $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$ é, para todo $r \geq 0$, um isomorfismo cujo inverso é $g^*\colon H^r(M) \to H^*(N)$ pois $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\mathrm{id}_N)^* = \mathrm{id}_{H^r(N)}$ e $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{H^r(M)}$.

Esta observação caracteriza $H^*(M)$ como um invariante diferenciável. Mais geralmente (porém ainda não definitivamente, conforme o Teorema 1 abaixo), $H^r(M)$ é um invariante do tipo de homotopia diferenciável de $M$.

Isto significa que se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to M$ são aplicações diferenciáveis tais que $g \circ f\colon M \to M$ e $f \circ g\colon N \to N$ são ambas diferenciavelmente homotópicas às aplicações identidades pertinentes então, para todo $r \geq 0$, $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$ e $g^*\colon H^r(M) \to H^r(M)$ são isomorfismos, um inverso do outro.

Na verdade, bem mais do que isto pode ser dito. Mostraremos agora o seguinte:

**Teorema 1.** *Uma aplicação contínua* $f\colon M \to N$ *induz, para cada* $r \geq 0$*, um homomorfismo* $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$*. Se* $g\colon M \to N$ *é também contínua e homotópica a* $f$ *(em classe* $C^0$*) então* $g^* = f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$*. Conseqüentemente, se* $M$ *e* $N$ *têm o mesmo tipo de homotopia (em particular, se são homeomorfas) então* $H^r(M)$ *e* $H^r(N)$ *são isomorfos para todo* $r \geq 0$*.*

**Demonstração**: Isto resulta das seguintes observações:

A) Pelo Teorema 8, Capítulo 4 em [AR3], se as aplicações diferenciáveis $f, g\colon M \to N$ são homotópicas (homotopia $C^0$) então elas são diferenciavelmente homotópicas. Logo, pelo Teorema 3 loc. cit., para toda forma fechada $\omega \in Z^r(N)$, existe $\alpha \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $g^*\omega - f^*\omega = d\alpha$, portanto $g^*[\omega] = f^*[\omega]$. Assim, aplicações diferenciáveis que são $C^0$-homotópicas induzem o mesmo homomorfismo em cohomologia.

B) Toda aplicação contínua $f\colon M \to N$ é homotópica a uma aplicação diferenciável.

Com efeito, seja $V_\varepsilon(N)$ uma vizinhança tubular de $N \subset \mathbb{R}^s$. Definamos a função contínua $\alpha\colon M \to \mathbb{R}^+$ pondo, para cada $x \in M$, $\alpha(x) = d(f(x), \mathbb{R}^s - V_\varepsilon(N))$. Pelo Teorema de Aproximação ([AR3], Cap. 4, Teor. 6), existe $g\colon M \to N$ diferenciável tal que $|g(x) - f(x)| < \alpha(x)$ para todo $x \in M$. Então, para todo $x \in M$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ está contido em $V_\varepsilon(N)$. Seja $\pi\colon V_\varepsilon(N) \to N$ a projeção natural. A aplicação $H\colon M \times [0,1] \to N$, dada por $H(x,t) = \pi((1-t)f(x) + tg(x))$, é uma homotopia entre $f$ e a aplicação diferenciável $g$.

Uma vez estabelecidas A) e B), o homomorfismo $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$, induzido pela aplicação contínua $f\colon M \to N$, é definido assim: toma-se uma aplicação diferenciável $g\colon M \to N$ que seja homotópica a $f$ e põe-se, por definição, $f^* = g^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$. Deve-se observar que o homomorfismo $f^*$ independe da escolha de $g$, em virtude da transitividade da relação de homotopia: se

$g, h\colon M \to N$ são diferenciáveis e homotópicas a $f$ então $g \simeq h$, logo $g^* = h^*$.

Do mesmo modo se mostra que se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ são aplicações contínuas então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e que se $f, g\colon M \to N$ são homotópicas então $f^* = g^*$. Em particular, se $f\colon M \to N$ é uma equivalência homotópica então $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$ é um isomorfismo para todo $r \geq 0$.

Um caso especial merece destaque: se $f\colon M \to N$ é um homeomorfismo então $f^*$ é um isomorfismo de $H^r(N)$ sobre $H^r(M)$ para todo $r \geq 0$. Assim, embora a estrutura diferencial tenha sido fortemente utilizada na definição de cohomologia de deRham, os grupos $H^r(M)$ são invariantes topológicos.

**Exemplo 3**. Podemos agora completar o Exemplo 2. Como $S^1$ e $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ têm o mesmo tipo de homotopia, vale $H^r(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \approx H^r(S^1)$ para todo $r \geq 0$. Ora, $H^2(S^1) = 0$ pois $\dim S^1 = 1$. Por outro lado, daí resulta também que $H^1(S^1) \approx \mathbb{R}$ pois já vimos que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \approx \mathbb{R}$. Mais geralmente, $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e $S^n$ têm o mesmo tipo de homotopia, seja qual for $n > 0$. Logo $H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) = 0$. Além disso, é claro que, para todo $r > 0$, vale $H^r(\mathbb{R}^n) = 0$ pois $\mathbb{R}^n$ é contrátil, ou seja, tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto. $\triangleright$

A cohomologia de deRham possui ainda uma estrutura multiplicativa, induzida pelo produto exterior de formas diferenciais. Se $\omega \in Z^r(M)$ e $\bar\omega \in Z^s(M)$ são formas fechadas em $M$ então o produto exterior $\omega \wedge \bar\omega$ é também uma forma fechada, pois $d(\omega \wedge \bar\omega) = d\omega \wedge \bar\omega + (-1)^r\, \omega \wedge d\bar\omega = 0$. Além disso, se $\alpha \in \Lambda^{r-1}(M)$ e $\bar\alpha \in \Lambda^{s-1}(M)$,

$$\begin{aligned}
(\omega + d\alpha) \wedge (\bar\omega + d\bar\alpha) &= \omega \wedge \bar\omega + \omega \wedge d\bar\alpha + d\alpha \wedge \bar\omega + d\alpha \wedge d\bar\alpha \\
&= \omega \wedge \bar\omega + d[(-1)^r\, \omega \wedge \bar\alpha + \alpha \wedge \bar\omega + \alpha \wedge d\bar\alpha] \\
&= \omega \wedge \bar\omega + d\beta,
\end{aligned}$$

logo o produto exterior de formas fechadas conserva a relação de

formas cohomólogas, ou seja, a aplicação bilinear

$$\Lambda\colon H^r(M) \times H^s(M) \to H^{r+s}(M),$$

dada por $[\omega] \wedge [\bar{\omega}] = [\omega \wedge \bar{\omega}]$, está bem definida.

Este produto exterior de classes de cohomologia dota a soma direta

$$H^*(M) = H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \cdots \oplus H^m(M), \;\; m = \dim M,$$

de uma estrutura de álgebra sobre os reais, usualmente conhecida como o *anel de cohomologia de deRham* da superfície $M$. O homomorfismo $f^*\colon H^*(N) \to H^*(M)$, induzido por uma aplicação contínua $f\colon M \to N$, respeita essa multiplicação, ou seja, tem-se $f^*([\omega] \wedge [\bar{\omega}]) = f^*[\omega] \wedge f^*[\bar{\omega}]$.

Quando o espaço vetorial $H^r(M)$ tem dimensão finita, o número $\beta_r = \dim H^r(M)$ chama-se o $r$-ésimo *número de Betti* da superfície $M$ e a soma alternada $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^m \beta_m$ chama-se a *característica de Euler* da superfície $M$.

# 3 A seqüência de Mayer-Vietoris

Sejam $U, V \subset M$ abertos na superfície $M$, tais que $M = U \cup V$. Para cada $r \geq 0$, consideremos os morfismos $\alpha\colon \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V)$ e $\beta\colon \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V) \to \Lambda^r(U \cap V)$, definidos por $\alpha(\omega) = (\omega|U, \omega|V)$ e $\beta(\omega, \bar{\omega}) = \omega|(U \cap V) - \bar{\omega}|(U \cap V)$, lembrando que $\omega|W$ significa a restrição da forma $\omega$ ao conjunto aberto $W \subset M$. Os morfismos $\alpha$ e $\beta$ dão origem à seqüência curta

$$0 \to \Lambda^r(M) \xrightarrow{\alpha} \Lambda^r(U) \oplus \Lambda^r(V) \xrightarrow{\beta} \Lambda^r(U \cap V) \to 0,$$

a qual afirmamos ser exata. É óbvio que $\alpha$ é injetivo e que sua imagem é igual ao núcleo de $\beta$. Resta apenas provar que $\beta$ é sobrejetivo.

Para isto, tomamos uma partição diferenciável da unidade $\varphi_U + \varphi_V = 1$ estritamente subordinada à cobertura $M = U \cup V$, portanto $\operatorname{supp.} \varphi_U \subset U$ e $\operatorname{supp.} \varphi_V \subset V$. Dada qualquer $\omega \in \Lambda^r(U \cap V)$, definimos as formas $\omega_1 \in \Lambda^r(U)$ e $\omega_2 \in \Lambda^r(V)$ pondo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_V \cdot \omega \quad \text{em} \quad U \cap V \quad \text{e} \quad \omega_1 = 0 \quad \text{em} \quad U - (U \cap V), \\ \omega_2 &= -\varphi_U \cdot \omega \quad \text{em} \quad U \cap V \quad \text{e} \quad \omega_2 = 0 \quad \text{em} \quad V - (U \cap V). \end{aligned}$$

Tem-se $\omega_1|(U \cap V) - \omega_2|(U \cap V) = \varphi_V \cdot \omega + \varphi_U \cdot \omega = \omega$, logo $\beta(\omega_1, \omega_2) = \omega$.

Como vimos no Capítulo I, esta seqüência exata curta dá origem a uma seqüência exata de cohomologia

$$\cdots \to H^r(M) \xrightarrow{\alpha_*} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{\beta_*} H^r(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^{r+1}(M) \to \ldots$$

que chamaremos a *seqüência de Mayer-Vietoris* associada à decomposição $M = U \cup V$.

Os homomorfismos $\alpha_*$ e $\beta_*$ são definidos por $\alpha_*([\omega]) = ([\omega|U], [\omega|V])$ e $\beta_*([\omega_1], [\omega_2]) = [\omega_1|(U \cap V) - \omega_2|(U \cap V)]$.

Por sua vez, $\Delta \colon H^r(U \cap V) \to H^{r+1}(M)$ é definido assim: dada $\omega \in \Lambda^r(U \cap V)$ fechada, como $\beta$ é sobrejetivo, existem formas $\omega_1 \in \Lambda^r(U)$ e $\omega_2 \in \Lambda^r(V)$, não necessariamente fechadas, tais que $\omega = \omega_1|(U \cap V) - \omega_2|(U \cap V)$. Então $0 = d\omega = d\omega_1|(U \cap V) - d\omega_2|(U \cap V)$ portanto $d\omega_1$ e $d\omega_2$ são $(r+1)$-formas em $U$ e em $V$ respectivamente, as quais são obviamente fechadas e coincidem em $U \cap V$ logo definem conjuntamente uma forma fechada em $M = U \cup V$, cuja classe de cohomologia é $\Delta[\omega]$.

**Exemplo 4**. Vamos usar a seqüência de Mayer-Vietoris a fim de calcular os grupos $H^r(M)$ quando $M = R^2 - \{p, q\}$, onde $p = (-1, 0)$ e $q = (1, 0)$. Para isso, tomaremos $M = U \cup V$ com $U = \{(x, y) \in M;\ x < 1/2\}$ e $V = \{(x, y) \in M;\ s > -1/2\}$. Evidentemente, $U$ e $V$ são homeomorfos a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, logo seus grupos $H^r(U)$ e $H^r(V)$ já foram calculados no Exemplo 2. Além disso, $U \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1/2 < x < 1/2\}$ tem o mesmo tipo de homotopia

de um ponto, portanto $H^r(U \cap V) = 0$ se $r > 0$ e $H^0(U \cap V) = \mathbb{R}$. Como $M$ é conexa, temos $H^0(M) = \mathbb{R}$. O cálculo de $H^2(M)$ se faz olhando para o trecho

$$H^1(U \cap V) \to H^2(M) \to H^2(U) \oplus H^2(V), \text{ ou seja, } 0 \to H^2(M) \to 0,$$

da seqüência de Mayer-Vietoris. Da exatidão resulta que $H^2(M) = 0$. Para calcular $H^1(M)$, usamos o trecho

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta_*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^1(M) \xrightarrow{\alpha_*} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{\beta_*} 0,$$

(lembrando que $H^1(U \cap V) = 0$), que equivale à seqüência exata

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta_*} \mathbb{R} \xrightarrow{\Delta} H^1(M) \xrightarrow{\alpha_*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to 0,$$

na qual $\beta_*(x, y) = x - y$, logo $\beta_*$ não é identicamente nulo, portanto é sobrejetivo. Por exatidão, o núcleo de $\Delta$ é todo o $\mathbb{R}$, logo $\Delta$ é identicamente nulo e então $\alpha_*$ é injetivo. Mas $\alpha_*$ é também sobrejetivo pois a última flexa é igual a zero. Assim, $\alpha_*\colon H^1(M) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é um isomorfismo. $\triangleright$

Resumindo: se $M$ é o plano menos dois pontos então $H^0(M) = \mathbb{R}$, $H^1(M) = \mathbb{R}^2$ e $H^r(M) = 0$ se $r \geq 2$.

A partir daí, por invariância topológica ou por tipo de homotopia, se pode calcular a cohomologia de outras superfícies, como por exemplo aquela obtida do cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ retirando-se dele um disco fechado.

**Exemplo 5**. Se $M$ é uma superfície simplesmente conexa então $H^1(M) = 0$. Quando $M$ é um aberto do espaço euclidiano, este é o Corolário 4, Capítulo 1 em [AR3]. No caso geral, tomamos uma vizinhança tubular $V \supset M$ no espaço euclidiano em que $M$ está contida. Então $V$ é também simplesmente conexa pois a projeção $\pi\colon V \to M$ é uma equivalência homotópica. Dada $\omega \in \Lambda^1(M)$ fechada, sua extensão $\pi^*\omega$ é uma forma fechada em $V$, portanto,

em virtude do corolário acima mencionado, existe $f\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $df = \pi^*\omega$. Então, $g = f|M$ é tal que $\omega = dg$. Assim, toda 1-forma fechada em $M$ é exata, ou seja, $H^1(M) = 0$. $\triangleright$

**Exemplo 6**. *Grupos de cohomologia da esfera $S^m$.* Já os conhecemos quando $m = 1$: $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ e $H^r(S^1) = 0$ se $r > 1$. Portanto suporemos $m \geq 2$, o que nos dá logo $H^1(S^m) = 0$. Usaremos uma decomposição $S^m = U \cup V$, onde $U$ e $V$ são abertos contráteis e $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia de $S^{m-1}$. Por exemplo, podemos tomar $U = S^m - \{a\}$ e $V = S^m - \{b\}$, com $a = (0, \ldots, 0, 1)$ e $b = (0, \ldots, 0, -1)$, ou então fixar um número $\delta \in (0, 1)$ e pôr $U = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m; x_{m+1} < \delta\}$, $V = \{x = (x_1, \ldots, x_{m+1} \in S^m; x_{m+1} > -\delta\}$. Assim, teremos $H^r(U) = H^r(V) = 0$ se $r > 0$, $H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$ e, como $m \geq 2$, $H^0(U \cap V) = \mathbb{R}$. Logo, o trecho abaixo da seqüência de Mayer-Vietoris, com $r \geq 2$,

$$H^{r-1}(U) \oplus H^{r-1}(V) \to H^{r-1}(U \cap V) \to H^r(S^m) \to H^r(U) \oplus H^r(V)$$

pode ser escrito como

$$0 \to H^{r-1}(S^{m-1}) \to H^r(S^m) \to 0$$

e daí resulta que $H^r(S^m)$ é isomorfo a $H^{r-1}(S^{m-1})$. Portanto, $H^m(S^m) \approx H^{m-1}(S^{m-1}) \approx \cdots \approx H^1(S^1) = \mathbb{R}$ (onde o símbolo $\approx$ significa "é isomorfo a"). Se, porém, tivermos $r < m$, daí resultará $m - r + 1 \geq 2$, logo

$$H^r(S^m) \approx H^{r-1}(S^{m-1}) \approx \cdots \approx H^1(S^{m-r+1}) = 0.$$

Resumindo: $H^m(S^m) = \mathbb{R}$ para todo $m > 0$ e $H^r(S^m) = 0$ se $0 < r < m$. $\triangleright$

Como observamos na Seção 2, os grupos de cohomologia de deRham de uma superfície, embora tenham sido definidos por meio de instrumentos do Cálculo Diferencial, são invariantes topológicos:

todo homeomorfismo $h\colon M \to N$ entre duas superfícies induz um isomorfismo $h^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$. Ou seja: superfícies homeomorfas têm a mesma cohomologia. Segue-se daí que se $m \neq n$ então as esferas $S^m$ e $S^n$ não são homeomorfas. Conseqüentemente, não pode haver um homeomorfismo entre espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ de dimensões diferentes $m$ e $n$. De fato, se considerarmos, mediante a projeção estereográfica os espaços $\mathbb{R}^m = S^m - \{p\}$ e $\mathbb{R}^n = S^n - \{q\}$ como esferas com um ponto omitido, todo homeomorfismo $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se estenderia a um homeomorfismo $\bar{h}\colon S^m \to S^n$ pondo-se $\bar{h}(p) = q$ e $\bar{h}(x) = h(x)$ se $x \neq p$.

**Exemplo 7**. Seja $T = S^1 \times S^1$ o toro bidimensional. Por meio da seqüência de Mayer-Vietoris, vamos determinar as dimensões dos espaços vetoriais $H^1(T)$ e $H^2(T)$. Para isto, tomemos $T = U \cup V$, onde $U$ e $V$ são abertos difeomorfos a cilindros, tais que $U \cap V$ é a reunião de dois cilindros disjuntos. Lembrando que cada cilindro tem o mesmo tipo de homotopia de $S^1$, vemos que a seqüência exata

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{A} H^0(U \cap V) \xrightarrow{B} H^1(T) \xrightarrow{C} H^1(U) \oplus$$
$$\oplus\, H^1(V) \xrightarrow{D} H^1(U \cap V)$$

é equivalente a

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{B} H^1(T) \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{D} \mathbb{R}^2.$$

Acima temos $A(x, y) = (x - y, x - y)$ e $D(u, v) = (u - v, u - v)$.

Pela exatidão, $\dim \mathcal{I}m(C) = \dim \mathcal{N}(D) = 1$. Usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, vemos que $\dim \mathcal{N}(C) = \dim \mathcal{I}m(B) = 2 - \dim \mathcal{N}(B) = 2 - \dim \mathcal{I}m(A) = 2 - 1 = 1$. Daí resulta que $\dim H^1(T) = \dim \mathcal{N}(C) + \dim \mathcal{I}m(C) = 1 + 1 = 2$. Para obter a dimensão de $H^2(T)$, usamos a seqüência exata

$$H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{E} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^2(T) \to H^2(U) \oplus H^2(V)$$

ou seja, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{E} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Delta} H^2(T) \to 0$. Temos $E(x, y) = (x - y, x - y)$, logo $\dim \mathcal{I}m(E) = 1 = \dim \mathcal{N}(\Delta)$ e daí $\dim \mathcal{I}m(\Delta) = 1$.

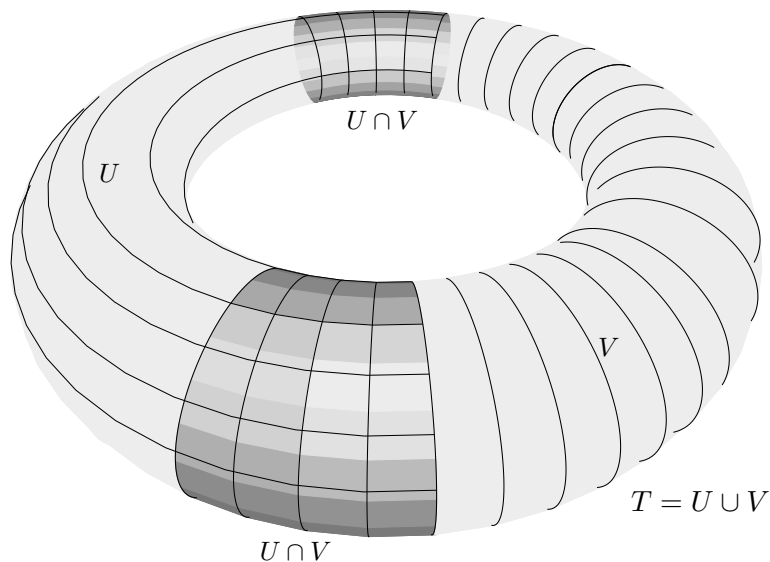



**Figura 1.**

Mas, pela exatidão da seqüência, $\Delta$ é sobrejetivo, portanto $\mathcal{I}m(\Delta) = H^2(T)$ e daí $\dim H^2(T) = 1$. $\triangleright$

Uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão 1, ou é um isomorfismo ou é identicamente nula. Resulta desta observação que a integração define um isomorfismo $\varphi\colon H^2(T) \to \mathbb{R}$, dado por $\varphi([\omega]) = \int_T \omega$. De fato, a transformação linear $\varphi$ está bem definida, pois se $[\omega] = [\bar{\omega}]$ então $\bar{\omega} = \omega + d\alpha$ e, como $\int_T d\alpha = 0$, temos $\int_T \omega = \int_T \bar{\omega}$. Além disso, $\varphi$ não é identicamente nula pois a forma elemento de área de $T$ tem integral diferente de zero. Pelo Exemplo 7, temos $\dim H^2(T) = \dim \mathbb{R} = 1$, logo $\varphi$ é um isomorfismo.

Um caso análogo é o da esfera $S^m$. Novamente a integração define um isomorfismo $\varphi\colon H^m(S^m) \to \mathbb{R}$, onde $\varphi([\omega]) = \int_{S^m} \omega$. Podemos mesmo ir um pouco adiante e notar que a projeção radial $f\colon \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to S^m$, $f(x) = x/|x|$ é uma equivalência homotópica,

logo $H^m(\mathbb{R}^{m+1}-\{0\})$ tem a mesma dimensão de $H^m(S^m)$, ou seja, 1. Então $\varphi\colon H^m(\mathbb{R}^{m+1}-\{0\})\to\mathbb{R}$, $\varphi([\omega])=\int_{S^m}\omega$, é um isomorfismo.

Mais geralmente, se $B\subset\mathbb{R}^{m+1}$ é uma bola fechada de centro 0 então claramente $\mathbb{R}^{m+1}-B$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^{m+1}-\{0\}$ e a aplicação $\xi\colon H^m(\mathbb{R}^{m+1}-B)\to\mathbb{R}$, $\xi([\omega])=\int_S\omega$, é um isomorfismo, se $S$ é qualquer esfera de centro 0 contida em $\mathbb{R}^{m+1}-B$ (ou seja, de raio maior do que o de $B$). Não importa qual a esfera $S'$ que se tome nessas condições: em virtude do Teorema de Stokes tem-se $\int_S\omega=\int_{S'}\omega$ pois $S$ e $S'$ formam o bordo de uma cápsula esférica do tipo $S\times[0,1]$.

Em particular, se $\omega\in\Lambda^m(\mathbb{R}^{m+1}-B)$ é tal que $\int_S\omega=0$ para alguma (e portanto qualquer) esfera de centro 0 e raio maior que o de $B$ então existe $\beta\in\Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^{m+1}-B)$ tal que $\omega=d\beta$.

Ainda com auxílio da seqüência de Mayer-Vietoris, mostraremos a seguir que se a superfície $M$ é compacta então, para todo $r\geq 0$, o espaço vetorial $H^r(M)$ tem dimensão finita.

Nossa argumentação se baseará na existência de coberturas abertas simples em toda superfície.

Uma cobertura aberta $M=\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$ da superfície $M$ chama-se *simples* quando toda interseção finita $A_{\lambda_1}\cap\cdots\cap A_{\lambda_k}$, com $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in L$, é contrátil.

Começamos estabelecendo o

**Lema 1**. *Seja $f\colon U\to V$ um difeomorfismo entre os abertos $U,V\subset\mathbb{R}^n$. Para todo $a\in U$, existe $r>0$ tal que a imagem $f(B)$ de qualquer bola $B=B(a;s)$ com $0<s\leq r$, é um aberto convexo.*

**Demonstração**: Ponhamos $g=f^{-1}\colon V\to U$, $b=f(a)$ e consideremos a função $\varphi\colon V\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(y)=|g(y)-a|^2=\langle g(y)-a,g(y)-a\rangle$. Temos $\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(y)=2\langle\frac{\partial g}{\partial y_j}(y),g(y)-a\rangle$ e

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i\partial y_j}(y)=2\left\langle\frac{\partial^2 g}{\partial y_i\partial y_j}(y),g(y)-a\right\rangle+2\left\langle\frac{\partial g}{\partial y_i}(y),\frac{\partial g}{\partial y_j}(y)\right\rangle.$$

Como $g(b) = a$, vemos que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j}(b) = 2\left\langle \frac{\partial g}{\partial y_i}(b), \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \right\rangle.$$

Assim, a matriz hessiana de $\varphi$ no ponto $b$ é igual à matriz de Gram dos vetores linearmente independentes $\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_n}(b)$, logo é positiva (cfr. [AL], pag. 213). Existe, portanto, uma bola $B'$ de centro $b$ contida em $V$, tal que a matriz hessiana de $\varphi$ é positiva em todos os pontos de $B'$. Então a função $\varphi\colon B' \to \mathbb{R}$ é convexa (cfr. [AR2], pag. 77). Seja $B = B(a;r) \subset U$ tal que $f(B) \subset B'$. Afirmamos que $f(B)$ é um conjunto convexo. Com efeito, se $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in B$, e $0 \leq t \leq 1$ então, pela convexidade de $\varphi$ em $B'$, temos

$$\begin{aligned}|g((1-t)y_1 + ty_2) - a|^2 = \varphi((1-t)y_1 + ty_2) &\leq (1-t)\varphi(y_1) + t\varphi(y_2)\\ &= (1-t)|g(y_1) - a|^2 + t|g(y_2) - a|^2\\ &= (1-t)|x_1 - a|^2 + t|x_2 - a|^2 < (1-t)r^2 + tr^2\\ &= r^2.\end{aligned}$$

Portanto $g((1-t)y_1 + ty_2) \in B$, logo $(1-t)y_1 + ty_2 \in f(B)$ e $f(B)$ é convexo.

Evidentemente, se $0 < s \leq r$ então $f(B(a;s))$ também é convexo.

No teorema abaixo, em que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície $m$-dimensional, usamos a vizinhança tubular local $V_\varepsilon(U)$. Nela, $U = \varphi(U_0)$ é um aberto em $M$, imagem de uma parametrização $\varphi\colon U_0 \to M$, com $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Tem-se $n-m$ campos de vetores $v_1, \ldots, v_{n-m}\colon U \to \mathbb{R}^n$, diferenciáveis, tais que, para cada $y \in U$, $\{v_1(y), \ldots, v_{n-m}(y)\} \subset T_yM^\perp$ é uma base ortonormal. A partir daí, define-se uma aplicação $\Phi\colon U_0 \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, pondo $\Phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i\, v_i(\varphi(x))$. Fixado $a = \varphi(x_0) \in U$, podemos restringir suficientemente o aberto $U_0 \ni x_0$ em $\mathbb{R}^m$ e o número $\varepsilon > 0$

de modo que $\Phi\colon U_0 \times B(0;\varepsilon) \to V_\varepsilon(U) \subset \mathbb{R}^n$ seja um difeomorfismo, com $\Phi(x,0) = \varphi(x)$ para todo $x \in U_0$. $\Phi$ transforma isometricamente cada bola $(n-m)$-dimensional $x \times B(0;\varepsilon)$, $x \in U_0$, na bola normal $B^\perp(\varphi(x);\varepsilon) \subset T_{\varphi(x)}M^\perp$. A projeção natural $\pi\colon V_\varepsilon(U) \to U$ é definida por $\pi = \pi_1 \circ \Phi^{-1}$, onde $\pi_1\colon U_0 \times B(0;\varepsilon) \to U_0$ é a projeção sobre o primeiro fator. Temos $V_\varepsilon(U) = \bigcup_{y \in U} B^\perp(y;\varepsilon)$ e $\pi(B^\perp(y;\varepsilon)) = y$. (Veja mais detalhes no Capítulo 4 de [AR3].)

**Teorema 2**. *Toda cobertura aberta de uma superfície $m$-dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ pode ser refinada por uma cobertura simples.*

**Demonstração**: Para cada ponto $a = \varphi(x_0) \in M$. tomemos uma vizinhança tubular local $V_\varepsilon(U)$, com $a \in U$ e $U = \varphi(U_0)$ contido em algum aberto da cobertura dada. Pelo Lema 1, existe uma bola $n$-dimensional $B \subset U_0 \times B(0;\varepsilon)$, com centro $(x_0, 0)$, tal que $\Phi(B)$ é convexo. Então $W_0 = B \cap (U_0 \times 0)$ é uma bola $m$-dimensional aberta, logo é difeomorfa a $\mathbb{R}^m$. Seja $W = \Phi(W_0)$. Como $\pi_1(B) = W_0$, tem-se $\pi(\Phi(B)) = W$. O aberto $W \subset M$ contém $a$ e é $\pi$-*convexo*, no seguinte sentido: para quaisquer $y_1, y_2 \in W$ e $t \in [0,1]$, tem-se $\pi((1-t)y_1 + ty_2) \in W$. (Note que $(1-t)y_1 + ty_2 \in \Phi(B)$ pois $\Phi(B)$ é convexo e $y_1, y_2 \in \Phi(B)$). Sabemos que $W$ é contrátil por ser difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ porém, mais geralmente, é fácil ver que todo conjunto $\pi$-convexo é contrátil. Além disso, toda interseção finita de conjuntos $\pi$-convexos é ainda um conjunto $\pi$-convexo. (Observe que se $U \cap U' \neq \varnothing$ então $V_\varepsilon(U) \cap V_\delta(U') = V_\eta(U \cap U')$, onde $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$.) Portanto, os conjuntos $W$ assim obtidos formam uma cobertura simples de $M$ que refina a cobertura inicialmente dada.

**Teorema 3**. *Se a superfície $M$ é compacta então, para todo $r \geq 0$, $H^r(M)$ é um espaço vetorial de dimensão finita.*

**Demonstração**: Por compacidade, $M$ admite uma cobertura aberta simples finita $M = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. O teorema será demonstrado por indução. Supondo-o válido para um certo valor de $k$, seja $M = U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1}$. Escrevamos $V = U_1 \cup \cdots \cup U_k$, de modo que $M =$

$V \cup U_{k+1}$. Pela hipótese de indução, $H^r(V \cap U_{k+1})$ tem dimensão finita, para todo $r \geq 0$, pois $V \cap U_{k+1} = (U_1 \cap U_{k+1}) \cup \cdots \cup (U_k \cap U_{k+1})$ é uma cobertura simples. A seqüência de Mayer-Vietoris associada à decomposição $M = V \cup U_{k+1}$ contém o trecho exato

$$H^{r-1}(V \cap U_{k+1}) \to H^r(M) \to H^r(V) \oplus H^r(U_{k+1}),$$

logo $H^r(M)$ tem dimensão finita, em virtude do Teorema do Núcleo da Imagem.

# 4 Cohomologia com suportes compactos

Dada a superfície $M$, para cada $r \geq 0$, indicaremos com $\Lambda_c^r(M)$ o subespaço vetorial de $\Lambda^r(M)$ cujos elementos são as $r$-formas $\omega$ com suporte compacto. É claro que $\omega \in \Lambda_c^r(M) \Rightarrow d\omega \in \Lambda_c^r(M)$, de modo que os espaços vetoriais $\Lambda_c^r(M)$, $r \geq 0$, constituem um subcomplexo $\Lambda_c^*(M)$ de $\Lambda^*(M)$, cujos grupos de cohomologia re-presentaremos por $H_c^r(M)$. Quando $M$ é compacta, tem-se $H_c^r(M) = H^r(M)$.

A fim de dar uma primeira indicação da diferença entre $H_c^r(M)$ e $H^r(M)$, consideraremos o caso em que $M$ é a reta real $\mathbb{R}$.

**Exemplo 8**. As formas de grau zero em $\mathbb{R}$ são as funções diferenciáveis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pertencem a $\Lambda_c^0(\mathbb{R})$ aquelas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty$, que se anulam fora de um intervalo $[a, b]$. Um exemplo típico disso é a função de Cauchy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x(x-1)}$ se $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ ou $x \geq 1$. As formas fechadas de grau zero em $\mathbb{R}$ são as constantes, logo a constante 0 é a única forma fechada de grau zero com suporte compacto. Assim, $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$. Na verdade, este argumento mostra que $H_c^0(M) = 0$ para toda superfície conexa não-compacta $M$ ou, mais geralmente, para toda superfície cujas componentes conexas são todas não-compactas. Vejamos $H_c^1(\mathbb{R})$. Toda $\omega \in \Lambda_c^1(\mathbb{R})$ é

fechada. Temos $\omega(x) = f(x)dx$, onde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto. Afirmamos que $\omega$ é exata se, e somente se, $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$. De fato, em primeiro lugar, se $\omega = dg$, onde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto, então, tomando $[a,b] \supset \operatorname{supp.} g$, teremos $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} dg = \int_a^b g'(x)x = g(b) - g(a) = 0$. Reciprocamente, se tivermos $\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_a^b f(x)dx = 0$ (onde $\operatorname{supp.} f \subset [a,b]$) então, definindo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, teremos obviamente $g(x) = 0$ se $x \le a$ e, se for $x > b$, será $g(x) = \int_a^b f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$, logo $g$ tem suporte compacto. Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vale $g'(x) = f(x)$ portanto $dg = \omega$ e $\omega$ é exata. Isto mostra que a transformação linear $A_0\colon \Lambda_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $A_0 \cdot \omega = \int_{\mathbb{R}} \omega$, tem como núcleo o subespaço $B_c^1(\mathbb{R})$ das formas exatas com suporte compacto. Como obviamente $A_0$ não é identicamente nula (e portanto é sobrejetiva), segue-se que $A_0$ induz um isomorfismo $A\colon H_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $A \cdot [\omega] = \int_{\mathbb{R}} \omega$. $\triangleright$

O exemplo acima já mostra que a cohomologia com suportes compactos não é um invariante do tipo de homotopia, pois um espaço contrátil como $\mathbb{R}$ tem cohomologia $H_c^1(\mathbb{R}) \neq 0$.

Na verdade, uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ não induz, em geral, um homomorfismo $f^*\colon H_c^r(N) \to H_c^r(M)$ como no caso da cohomologia usual pois se $\omega$ é uma forma com suporte compacto em $N$ não é sempre verdade que seu pullback $f^*\omega$ também tenha suporte compacto. Um exemplo disso ocorre com a aplicação de Euler $E\colon \mathbb{R} \to S^1$, definida por $E(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$. Se $\Omega = -ydx + xdy \in \Lambda^1(S^1)$ é a forma elemento de ângulo em $S^1$ então $\Omega$ tem obviamente suporte compacto mas o mesmo não se dá com $E^*\Omega = dt$ em $\mathbb{R}$.

Para tratar da cohomologia com suportes compactos, as aplicações adequadas são as chamadas próprias.

Uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$, entre subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, chama-se *própria* quando a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de cada subconjunto compacto $K \subset Y$ é um subconjunto compacto

de $X$. Equivalentemente, $f$ diz-se própria quando toda seqüência de pontos $x_k \in X$ sem subseqüência convergente é transformada por $f$ numa seqüência $(f(x_k))$ que também não possui subseqüência convergente em $Y$. Se $X$ é compacto, não há seqüência sem subseqüência convergente em $X$, logo toda aplicação contínua $f\colon X \to Y$ é própria.

Se a aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ é própria e $\omega \in \Lambda_c^r(N)$ então $f^*\omega \in \Lambda_c^r(M)$ pois $\operatorname{supp.} f^*\omega$ é um subconjunto fechado do compacto $f^{-1}(\operatorname{supp.} \omega)$. Portanto $f$ induz um morfismo $f^*\colon \Lambda_c^*(N) \to \Lambda_c^*(M)$, logo um homomorfismo $f^*\colon H_c^r(N) \to H_c^r(M)$ em cada dimensão $r \geq 0$. Se $g\colon N \to P$ é outra aplicação diferenciável própria, vale $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H_c^r(P) \to H_c^r(M)$.

No que diz respeito a homotopias, não é verdade em geral que duas aplicações diferenciáveis próprias e homotópicas induzam o mesmo homomorfismo na cohomologia com suportes compactos. Por exemplo, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, são próprias e homotópicas (pois $\mathbb{R}$ é contrátil) mas $f^*, g^*\colon H_c^1(\mathbb{R}) \to H_c^1(\mathbb{R})$ são tais que $f^*[\omega] = [\omega]$ e $g^*[\omega] = -[\omega]$, logo $f^* \neq g^*$, já que $H_c^1(\mathbb{R}) \neq 0$.

Para que se tenha $f^* = g^*$, deve-se supor que as aplicações diferenciáveis $f, g\colon M \to N$, além de próprias e homotópicas, sejam *propriamente homotópicas*, isto é, que a homotopia $H\colon M \times [0,1] \to N$ entre $f$ e $g$ seja uma aplicação própria.

Com efeito, a prova de que aplicações diferenciáveis homotópicas induzem o mesmo homomorfismo em cohomologia tem por base o Teorema 2 do Capítulo 3 em [AR3], no qual se estabelece uma homotopia algébrica entre $f^*$ e $g^*$. No final daquela demonstração se faz uso do homomorfismo $H^*$, induzido pela homotopia $H\colon M \to N$ entre $f$ e $g$. Neste ponto, é necessário (e suficiente) supor que $H$ é uma aplicação própria, ou seja, que $f$ e $g$ são propriamente homotópicas.

Note-se que se a homotopia $H: M \times [0,1] \to N$ é própria então, para cada $t \in [0,1]$, a aplicação $H_t: M \to N$, onde $H_t(x) = H(x,t)$, é própria. Em particular, $f = H_0$ e $g = H_1$ são próprias. A recíproca é falsa: é possível que, para todo $t \in [0,1]$, $H_t$ seja própria sem que $H: M \times [0,1] \to N$ o seja.

**Exemplo 9**. Se $0 \leq r < m$ então $H_c^r(\mathbb{R}^m) = 0$. Isto é claro quando $r = 0$ pois $\mathbb{R}^m$ não é compacto.

Seja $0 < r < m$. Dada a forma fechada $\omega \in \Lambda_c^r(\mathbb{R}^m)$, pelo Lema de Poincaré existe uma forma $\alpha \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{R}^m)$ tal que $d\alpha = \omega$. O suporte de $\alpha$, entretanto, pode não ser compacto. Devemos encontrar uma $(r-1)$-forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^m$ cuja diferencial seja igual a $\omega$.

Vejamos inicialmente o caso $r = 1$. Então $\alpha: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é simplesmente uma função $C^\infty$. Seja $B \subset \mathbb{R}^m$ uma bola fechada de centro 0 tal que $\operatorname{supp.} \omega \subset \operatorname{int.} B$. Como $d\alpha = \omega$ se anula no conjunto conexo $\mathbb{R}^m - B$, a função $\alpha$ é constante, digamos com $\alpha(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}^m - B$. Então a função $\beta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida por $\beta(x) = \alpha(x) - c$, se anula em $\mathbb{R}^m - B$ logo tem suporte compacto e, além disso, $d\beta = d\alpha = \omega$.

Consideremos, em seguida, o caso em que $1 < r < m$. Então tomamos bolas fechadas $B = B[0;\varepsilon]$, $B' = B[0;2\varepsilon]$ e $C = B[0;3\varepsilon]$ tais que $\operatorname{supp.}\omega \subset \operatorname{int.} B$, e uma função $f: \mathbb{R}^m \to [0,1]$ de classe $C^\infty$, tal que $f(B') = 0$ e $f(\mathbb{R}^m - C) = 1$. Lembremos que $d\alpha = \omega$ se anula fora do suporte de $\omega$, logo a restrição $\alpha|(\mathbb{R}^m - B)$ é fechada. Como $\mathbb{R}^m - B$ tem o mesmo tipo de homotopia de $S^{m-1}$ e o grau de $\alpha$ é $r - 1 < m - 1$, vemos que $\alpha$ é exata em $\mathbb{R}^m - B$, ou seja, existe $\beta \in \Lambda^{r-2}(\mathbb{R}^m - B)$ tal que $d\beta = \alpha$. Então a forma $\gamma$, de grau $r - 1$ em $\mathbb{R}^m$, definida por $\gamma = \alpha$ em $B$ e $\gamma = \alpha - d(f \cdot \beta)$ em $\mathbb{R}^m - B$, tem suporte compacto, contido em $C$, pois

$$x \in \mathbb{R}^m - C \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \gamma(x) = \alpha(x) - d\beta(x) = \alpha(x) - \alpha(x) = 0.$$

Além disso, em todos os pontos de $\mathbb{R}^m$, tem-se $d\gamma = d\alpha - dd(f \cdot \beta) = d\alpha = \omega$. $\triangleright$

A cohomologia $m$-dimensional de $\mathbb{R}^m$ com suportes compactos está contida no

**Teorema 4**. *Seja $M$ uma superfície $m$-dimensional conexa e orientada (compacta ou não). A transformação linear $A\colon H_c^m(M) \to \mathbb{R}$, definida por $A\cdot[\omega] = \int_M \omega$, é um isomorfismo.*

**Demonstração**: Em primeiro lugar, $A$ está bem definida pois

$$[\bar{\omega}] = [\omega] \Rightarrow \bar{\omega} = \omega + d\alpha \Rightarrow \int_M \bar{\omega} = \int_M \omega + \int_M d\alpha = \int_M \omega.$$

Em segundo lugar, $A$ não é identicamente nula. Se $M$ é compacta, basta tomar $\omega =$ elemento de volume para se ter $\int_M \omega \neq 0$. Em geral, um modo fácil de obter $\omega \in \Lambda_c^m(M)$ com $\int_M \omega \neq 0$ consiste em tomar uma parametrização $\varphi\colon B(0;3) \to U \subset M$, uma função $\xi\colon M \to [0,1]$ de classe $C^\infty$ com $\xi(\varphi(x)) = 1$ se $|x| \leq 1$, $\xi(\varphi(x)) = 0$ se $2 \leq |x| \leq 3$, $\xi(p) = 0$ se $p \notin U$ e pôr $\omega(p) = \xi(p)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ para $p \in U$, $\omega(p) = 0$ quando $p \in M - U$. Como $\dim \mathbb{R} = 1$, $A$ é sobrejetiva. Resta mostrar que $A$ é injetiva, isto é, que se $\omega \in \Lambda_c^m(M)$ é tal que $\int_M \omega = 0$ então existe $\alpha \in \Lambda_c^{m-1}(M)$ com $\omega = d\alpha$.

Consideraremos inicialmente o caso em que $M = \mathbb{R}^m$. Pelo Lema de Poincaré, existe $\alpha \in \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ tal que $d\alpha = \omega$, mas o suporte de $\alpha$ pode não ser compacto. Tomamos então uma bola fechada $B$, de centro 0, contendo $\operatorname{supp.}\omega$ em seu interior. Temos $\int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_B \omega$. Seja $S = \partial B$. Pelo Teorema de Stokes, vê-se que $\int_S \alpha = \int_B d\alpha = \int_B \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0$. Como foi observado na Seção 3, resulta daí que a restrição de $\alpha$ a $\mathbb{R}^m - B$ é exata: existe $\beta \in \Lambda^{m-2}(\mathbb{R}^m - B)$ tal que $d\beta = \alpha|(\mathbb{R}^m - B)$. A partir daí a demonstração segue como no Exemplo 9: consideramos bolas fechadas $B = B[0;\varepsilon]$, $B' = B[0;2\varepsilon]$ e $C = B[0;3\varepsilon]$ tais que $\operatorname{supp.}\alpha \subset \operatorname{int.} B$ e uma função $f\colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$ de classe $C^\infty$, tal que $f(B') = 0$ e $f(\mathbb{R}^m - C) = 1$. Então definimos $\gamma \in \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ pondo $\gamma = \alpha - d(f\cdot\beta)$ em $\mathbb{R}^m - B$ e $\gamma = \alpha$ em $B$. Vemos que $\gamma$ tem suporte compacto, pois se anula fora de $C$, e $d\gamma = d\alpha = \omega$.

Vejamos agora o caso geral, em que $M$ é qualquer superfície $m$-dimensional orientada e conexa.

Tomamos um aberto $U_0 \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ e uma forma $\omega_0 \in \Lambda_c^m(M)$ com supp. $\omega_0 \subset U_0$ e $\int_M \omega_0 = 1$. Mostraremos então que toda $m$-forma com suporte compacto em $M$ é cohomóloga a um múltiplo constante de $\omega_0$. Ou seja, dada arbitrariamente $\omega \in \Lambda_c^m(M)$, existem $k \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \Lambda_c^{m-1}(M)$ tais que $\omega = k \cdot \omega_0 + d\alpha$. Usando partição da unidade, vemos que basta provar isto quando o suporte de $\omega$ está contido num aberto $U \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, pois toda $\omega \in \Lambda_c^m(M)$ é soma de formas deste tipo.

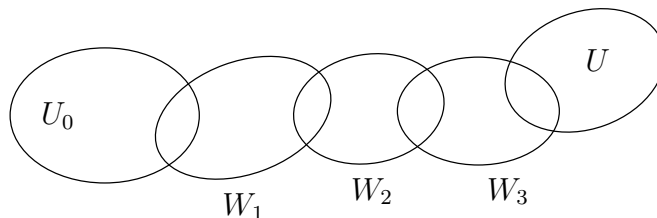



**Figura 2.**

Como $M$ é conexa, existe uma cadeia de abertos $W_0 = U_0$, $W_1, \ldots, W_r = U$ em $M$, todos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$, tais que $W_{i-1} \cap W_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, r$. Para cada um desses valores de $i$, tomemos uma forma $\omega_i \in \Lambda_c^m(M)$, com suporte contido em $W_{i-1} \cap W_i$, tal que $\int_M \omega_i \neq 0$. Resulta do que vem de ser provado acima que, escrevendo $\alpha \sim \beta$ quando $\alpha$ e $\beta$ são formas cohomólogas com suporte compacto, existem constantes $k_1, \ldots, k_r$ para as quais valem as relações

$$\omega_1 \sim k_1 \cdot \omega_0, \;\; \omega_2 \sim k_2 \cdot \omega_1, \ldots, \omega = k_r \cdot \omega_r\,,$$

portanto $\omega \sim k \cdot \omega_0$ onde $k = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots, k_r$.

Fica assim estabelecido que $\dim H_c^m(M) \leq 1$. Mas já vimos que a transformação linear $A\colon H_c^m(M) \to \mathbb{R}$, definida por $A{\cdot}[\omega] = \int_M \omega$, é sobrejetiva. Logo $\dim H_c^m(M) = 1$ e $A$ é um isomorfismo. $\square$

Resulta do Teorema 4 que se $M$ é $m$-dimensional, compacta, orientada e conexa então uma forma $\omega \in \Lambda^m(M)$ tal que $\int_M \omega = 0$ é exata.

Uma importante conseqüência do Teorema 4 é a

**Invariância da dimensão:** *Se as superfícies diferenciáveis $M$ e $N$ são homeomorfas então* dim. $M$ = dim. $N$. *Em particular, se $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos homeomorfos então $m = n$.*

## 5 Recobrimentos *vs* cohomologia

Sejam $\widetilde{M}$ e $M$ superfícies. Uma aplicação $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ chama-se um *recobrimento* quando $M$ é conexa e todo ponto $y \in M$ possui uma vizinhança $V$ cuja imagem inversa $\pi^{-1}(V) = \bigcup V_\lambda$ é reunião disjunta de abertos $V_\lambda$, cada um dos quais é aplicado por $\pi$ homeomorficamente sobre $V$.

Segue-se imediatamente da definição que todo recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é uma aplicação sobrejetiva.

Chamaremos *recobrimento diferenciável* a uma aplicação de recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ que seja um difeomorfismo local entre as superfícies $\widetilde{M}$ e $M$. Ele se chamará *regular* quando para quaisquer $x_1, x_2 \in \widetilde{M}$ com $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ existir um difeomorfismo $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ (dito um *automorfismo de recobrimento*) tal que $\pi \circ g = \pi$ e $g(x_1) = x_2$. Diz-se ainda que o recobrimento $\pi$ é *finito* quando, para todo $y \in M$, a fibra $\pi^{-1}(y)$ for um conjunto finito. Neste caso, o conjunto $G$ dos automorfismos de recobrimento é um grupo finito e, além disso, a aplicação $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é própria, logo induz homomorfismos $\pi^*\colon H^r(M) \to H^r(\widetilde{M})$ e $\pi^*\colon H^r_c(M) \to H^r_c(\widetilde{M})$. (Nossa referência para estes fatos é [GFER].)

**Teorema 5**. *Seja $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ um recobrimento diferenciável, regular e finito. Para todo $r \geq 0$, o homomorfismo induzido $\pi^*\colon H^r(M) \to H^r(\widetilde{M})$ é injetivo.*

**Demonstração**: Indiquemos com $|G|$ o número de elementos do grupo $G$ de automorfismos do recobrimento $\pi$. Tem-se $g \in G$ se, e somente se, $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ é um homeomorfismo (portanto um difeomorfismo) tal que $\pi \circ g = \pi$. Se $\omega \in \Lambda^r(M)$ é uma forma fechada tal que $\pi^*\omega = d\alpha$ é exata, introduzamos a forma $\tilde{\alpha} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g^*\alpha$. Levando em conta que $g^* \circ \pi^* = (\pi \circ g)^* = \pi^*$ para todo $g \in G$, constatamos que

$$d\tilde{\alpha} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*(d\alpha) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\pi^*\omega = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi^*\omega = \pi^*\omega = d\alpha.$$

Além disso, é claro que $h^*\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ para todo $h \in G$. Isto se exprime dizendo que a forma $\tilde{\alpha}$ é *invariante* sob o grupo $G$. Em conseqüência disto, mostraremos que existe $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $\pi^*\beta = \tilde{\alpha}$.

Com efeito, a igualdade $g^*\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ significa que, para todo $x \in \widetilde{M}$ e quaisquer $v_1, \ldots, v_{r-1} \in T_x\widetilde{M}$, tem-se $\tilde{\alpha}(g(x))\cdot(g'(x)\cdot v_1, \ldots, g'(x)\cdot v_{r-1}) = \tilde{\alpha}(x)\cdot(v_1, \ldots, v_{r-1})$. Então definimos $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$ pondo, para cada $y = \pi(x) \in M$ e quaisquer $w_1 = \pi'(x)\cdot v_1, \ldots, w_{r-1} = \pi'(x)\cdot v_{r-1}$, $\beta(y)\cdot(w_1, \ldots, w_{r-1}) = \tilde{\alpha}(x)\cdot(v_1, \ldots, v_{r-1})$. Como $\pi'(x) : T_x\widetilde{M} \to T_yM$ é um isomorfismo, as escolhas dos $v_i$ tais que $\pi'(x)v_i = w_i$ são únicas. Assim, a única arbitrariedade cometida na definição de $\beta$ foi a de termos escrito $y = \pi(x)$ em vez de $y = \pi(g(x))$ com algum $g \in G$. (Neste momento estamos usando o fato de que o recobrimento é regular.) Se tivéssemos posto $y = \pi(g(x))$, como $w_i = \pi'(x)\cdot v_i = (\pi\circ g)'(x)\cdot v_i = \pi'(g(x))\cdot g'(x)\cdot v_i$, $i = 1, \ldots, r-1$, nossa definição forneceria o mesmo resultado, pois

$$\begin{aligned}\beta(y)\cdot(w_1, \ldots, w_{r-1}) &= \tilde{\alpha}(g(x))\cdot(g'(x)\cdot v_1, \ldots, g'(x)\cdot v_{r-1})\\ &= \tilde{\alpha}(x)\cdot(v_1, \ldots, v_{r-1}).\end{aligned}$$

Assim, a forma $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$ tal que $\pi^*\beta = \tilde{\alpha}$ está bem definida.

Para finalizar, mostraremos que $\omega = d\beta$. Como $\pi$ é um difeomorfismo local, logo $\pi'(x)\colon T_x\widetilde{M} \to T_yM$, $y = \pi(x)$, é um isomorfismo para todo $x \in \widetilde{M}$, segue-se que $\pi^*\colon \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(\widetilde{M})$ é

injetiva (na verdade, um isomorfismo sobre as $r$-formas invariantes em $\widetilde{M}$). Portanto, para concluir que $\omega = d\beta$, basta mostrar que $\pi^*\omega = \pi^*(d\beta)$, ou seja, que $d\alpha = d(\pi^*\beta)$. Mas já vimos que $\pi^*\beta = \tilde{\alpha}$ e que $d\tilde{\alpha} = d\alpha$. Logo, temos $\omega = d\beta$.

Assim, $\pi^*[\omega] = 0$ em $H^r(\widetilde{M})$ implica $[\omega] = 0$ em $H^r(M)$ e $\pi^*$ é injetivo. $\triangleright$

**Teorema 5c**. *Se $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento diferenciável, regular e finito entre as superfícies $\widetilde{M}$ e $M$ então, para todo $r \geq 0$, o homomorfismo induzido $\pi^*\colon H^r_c(M) \to H^r_c(\widetilde{M})$ é injetivo.*

**Demonstração**: Embora $\Lambda^r_c(M)$ seja um subespaço vetorial de $\Lambda^r(M)$ e a definição de $\pi^*\colon H^r_c(M) \to H^r_c(\widetilde{M})$, e até a notação que usamos, seja formalmente a mesma de $\pi^*\colon H^r(M) \to H^r(\widetilde{M})$, não é verdade que o primeiro desses homomorfismos seja uma restrição do segundo, mesmo porque $H^r_c(M)$ não é um subespaço de $H^r(M)$.

Entretanto, se revirmos, passo a passo, a demonstração do Teorema 5, perceberemos que se a $r$-forma $\omega$ em $M$ tiver suporte compacto e $\pi^*\omega = d\alpha$, onde $\alpha$ tem suporte compacto em $\widetilde{M}$, então o argumento lá desenvolvido nos fornece uma $(r-1)$-forma $\beta$ em $M$ com suporte compacto, tal que $d\beta = \omega$, o que prova o Teorema 5c. $\square$

Um caso particular interessante ocorre quando o recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ tem duas folhas, isto é, a imagem inversa $\pi^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$ de cada ponto $y \in M$ tem dois elementos. Neste caso, o grupo $G$ dos automorfismos do recobrimento $\pi$ tem dois elementos, a saber, a aplicação identidade $\mathrm{id}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ e o difeomorfismo $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, que associa a cada ponto $x_1 \in \widetilde{M}$ o outro ponto $x_2 \in \widetilde{M}$ tal que $\pi(x_2) = \pi(x_1)$. Tem especial relevância a situação em que $\widetilde{M}$ é orientada, $M$ é conexa e, para todo $x_1 \in \widetilde{M}$, o isomorfismo $g'(x_1)\colon T_{x_1}\widetilde{M} \to T_{x_2}\widetilde{M}$ inverte orientação. Diz-se então que $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é o *recobrimento duplo orientado* de $M$.

Observemos que se o recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ tem duas folhas e $M$ é conexa então $\widetilde{M}$ tem, no máximo, duas componentes conexas.

"main2"
2009/6/19
page 47



De fato, fixado $a \in \widetilde{M}$, todo ponto $x \in \widetilde{M}$ pode ser ligado, por um caminho em $\widetilde{M}$, ao ponto $a$ ou a $g(a)$. Para ver isto, tomamos um caminho $\lambda\colon [0,1] \to M$ tal que $\lambda(0) = \pi(x)$ e $\lambda(1) = \pi(a)$. Em seguida consideramos o levantamento de $\lambda$ a partir de $x$, que é um caminho $\tilde{\lambda}\colon [0,1] \to \widetilde{M}$, com $\tilde{\lambda}(0) = x$ e $\pi \circ \tilde{\lambda} = \lambda$. (A existência de $\tilde{\lambda}$ é fácil de provar e pode ser vista em [GFER], pag. 129.) Como $\pi(\tilde{\lambda}(1)) = \lambda(1) = \pi(a)$, segue-se que $\tilde{\lambda}(1) = a$ ou $\tilde{\lambda}(1) = g(a)$.

**Teorema 6**. *Seja $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ um recobrimento duplo orientado. A superfície $M$ é orientável se, e somente se, $\widetilde{M}$ é desconexa.*

**Demonstração**: Se $\widetilde{M} = A \cup B$ é uma cisão não-trivial de $M$ então é claro que $\pi$ aplica cada uma das componentes conexas $A$ e $B$ difeomorficamente sobre $M$, logo $M$ é orientável. Reciprocamente, se $M$ admite uma orientação, seja $A \subset M$ o aberto formado pelos pontos $x \in \widetilde{M}$ tais que $\pi'(x)\colon T_x\widetilde{M} \to T_{\pi(x)}M$ preserva orientação. Evidentemente, $g(A) = B$ é o conjunto dos pontos $y \in \widetilde{M}$ tais que $\pi'(y)$ inverte orientação. A reunião disjunta $\widetilde{M} = A \cup B$ é uma cisão não-trivial de $\widetilde{M}$, logo $\widetilde{M}$ é desconexa.

**Observação**: Se $\widetilde{M}$ é orientada e $M$ é conexa, um recobrimento diferenciável de duas folhas $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ não é necesssariamente aquilo que chamamos acima de recobrimento duplo orientado. Para ter este nome, é necessário que o difeomorfismo sem pontos fixos $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, tal que $\pi \circ g = \pi$, inverta orientação. Por exemplo, se $T = S^1 \times S^1$ é o toro bidimensional então $\pi\colon T \to T$, definido por $\pi(z,w) = (z^2, w)$, é um recobrimento de duas folhas mas não é um recobrimento duplo orientado (nem poderia ser, pois seu domínio é conexo e sua imagem é orientável). Mais geralmente, pode-se afirmar (e é fácil provar) que se $N$ é orientável e $f\colon M \to N$ é um difeomorfismo local então $M$ é orientável.

**Exemplo 10**. Seja $P^m$ o espaço projetivo (real) de dimensão $m$, apresentado aqui como o conjunto das matrizes $(m+1)\times(m+1)$ da forma $[x_i \cdot x_j]$ onde $x = (x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m$. (Veja [AR3], pags. 66 e 134). A aplicação $\pi\colon S^m \to P^m$ definida por $\pi(x) = [x_i \cdot x_j]$ se

$x = (x_1, \ldots, x_{m+1})$ é um difeomorfismo local tal que $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow y = \pm x$, logo $\pi$ é um recobrimento de duas folhas e a involução sem ponto fixo $g \colon S^m \to S^m$ tal que $\pi \circ g = \pi$ é simplesmente a aplicação antípoda $g(x) = -x$, a qual, como se sabe, preserva orientação quando $m$ é ímpar e inverte se $m$ é par. Portanto o espaço projetivo $P^m$ é orientável quando $m$ é ímpar e, quando $m$ é par, $P^m$ é não-orientável e a aplicação natural $\pi \colon S^m \to P^m$ é um recobrimento duplo orientado. Quer $m$ seja par ou ímpar, quando $0 < r < m$ tem-se $H^r(S^m) = 0$ e, como $\pi^* \colon H^r(P^m) \to H^r(S^m)$ é injetivo, daí resulta que $H^r(P^m) = 0$. Resta calcular $H^m(P^m)$. Se $m$ é ímpar, $H^m(P^m)$ tem dimensão 1 como ocorre com qualquer superfície $m$-dimensional compacta orientável. E se $m$ é par, tem-se $H^m(P^m) = 0$ como resulta do teorema seguinte. Nele se usa o fato de que toda superfície não-orientável possui um recobrimento duplo orientado. (Vide [GFER], Capítulo 6.)

**Teorema 7**. *Se a superfície $m$-dimensional conexa $M$ é não-orientável então $H_c^m(M) = H^m(M) = 0$.*

**Demonstração**: Seja $\pi \colon \widetilde{M} \to M$ o recobrimento duplo orientado de $M$. Pelo Teorema 4 a transformação linear $A \colon H_c^m(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$, definida por $A \cdot [\omega] = \int_{\widetilde{M}} \omega$, é um isomorfismo. Seja $g \colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ o difeomorfismo sem pontos fixos tal que $\pi \circ g = \pi \colon \widetilde{M} \to M$. Para toda $\omega \in \Lambda_c^m(M)$, como $g$ inverte orientação, temos

$$A \cdot \pi^*[\omega] = \int_{\widetilde{M}} \pi^*\omega = \int_{\widetilde{M}} g^*(\pi^*\omega) = -\int_{\widetilde{M}} \pi^*\omega = -A \cdot \pi^*[\omega],$$

logo $A\pi^*[\omega] = 0$ e, como $A$ é injetiva, $\pi^*[\omega] = 0$. Mas, pelo Teorema 5, $\pi^*[\omega] = 0 \Rightarrow [\omega] = 0$. Então $H_c^m(M) = 0$. Isto inclui $H^m(M) = 0$ se $M$ for compacta. Caso $M$ seja não-compacta, o mesmo se dá com $\widetilde{M}$. Então, pelo Teorema de Dualidade de Poincaré, que será provado logo mais, temos $H^m(\widetilde{M}) = \left[H_c^0(\widetilde{M})\right]^* = 0$ e, pelo Teorema 5, concluímos que $H^m(M) = 0$. $\triangleright$

**Exemplo 11**. Sejam $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma hiperfície conexa não-orientável (necessariamente não-fechada) e $V_{2\varepsilon}(M)$ uma vizinhança

tubular. O bordo $\widetilde{M}$ da vizinhança tubular fechada $V_\varepsilon[M]$ é uma hiperfície orientável (como ocorre com o bordo de toda superfície $(m+1)$-dimensional em $\mathbb{R}^{m+1}$). A projeção $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento de duas folhas pois é um difeomorfismo local e, para cada $y \in M$, $\pi^{-1}(y)$ consiste nos dois extremos do segmento $B^\perp[y; \varepsilon(y)]$ (bola normal unidimensional). Além disso, $\widetilde{M}$ é conexa porque, do contrário, teria duas componentes, cada uma das quais seria aplicada difeomorficamente por $\pi$ sobre $M$, e então $M$ seria orientável. Segue-se do Teorema 6 que $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento duplo orientado.

# 6 O Teorema de Jordan-Brouwer topológico

Foi provado no Capítulo 4 de [AR3] que se a hiperfície diferenciável $M$ é um subconjunto fechado conexo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ então seu complemento $\mathbb{R}^m - M$ tem duas componentes conexas, das quais $M$ é a fronteira comum. O teorema original de Jordan, de onde provém este resultado, diz respeito, entretanto, ao que hoje se chama uma *curva de Jordan*, que é a imagem $C$ da circunferência unitária $S^1$ por um homeomorfismo (de classe $C^0$) $h\colon S^1 \to C \subset \mathbb{R}^2$.

Vamos agora eliminar a hipótese de diferenciabilidade, provando que o Teorema de Jordan (generalizado por Brouwer) vale para todo conjunto conexo fechado $F \subset \mathbb{R}^m$ que seja imagem da esfera $S^{m-1}$ (ou, mais geralmente, de uma hiperfície diferenciável $M \subset \mathbb{R}^m$) por um homeomorfismo.

Começamos indagando se os complementos $\mathbb{R}^m - F_1$ e $\mathbb{R}^m - F_2$ de dois conjuntos fechados homeomorfos $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ são ainda homeomorfos. Um exemplo simples mostra que não.

**Exemplo 12**. Sejam $F_1$ e $F_2$ conjuntos fechados do plano, ambos formados pela reunião de duas circunferências disjuntas. Só que em

$F_1$ essas circunferências são concêntricas e em $F_2$ elas são exteriores uma à outra. Evidentemente, $F_1$ e $F_2$ são homeomorfos mas seus complementos $\mathbb{R}^2 - F_1$ e $\mathbb{R}^2 - F_2$ nem ao menos têm o mesmo tipo

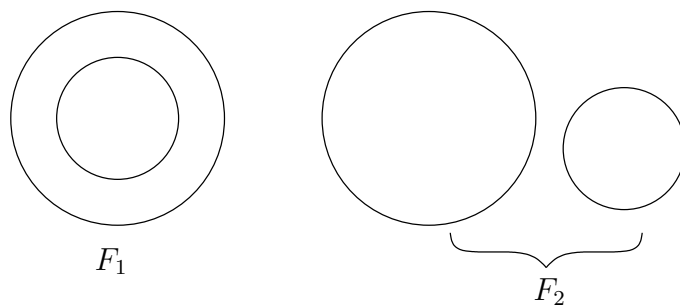



**Figura 3.**

de homotopia. De fato, $\mathbb{R}^2 - F_1$ tem o tipo de homotopia de um ponto mais duas circunferências disjuntas, enquanto que $\mathbb{R}^2 - F_2$ tem o tipo de homotopia de dois pontos mais o algarismo 8. ▷

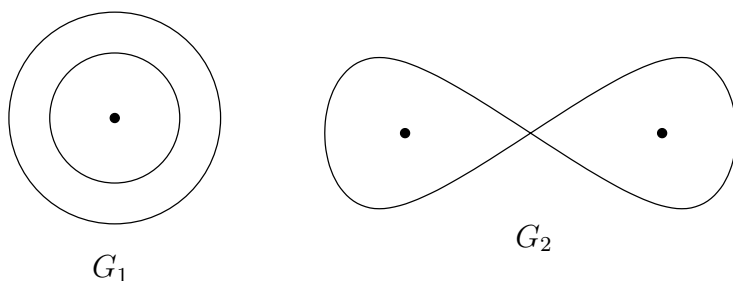



**Figura 4.** $G_1$ e $G_2$ têm respectivamente os mesmos tipos de homotopia que $\mathbb{R}^2 - F_1$ e $\mathbb{R}^2 - F_2$.

Neste exemplo, embora os tipos de homotopia sejam diferentes, vemos que $\mathbb{R}^2 - F_1$ e $\mathbb{R}^2 - F_2$ têm os mesmos grupos de cohomologia, que são isomorfos a $\mathbb{R}^3$ em dimensão 0, a $\mathbb{R}^2$ em dimensão 1 e são nulos em dimensão $\geq 2$.

Nosso objetivo é provar que isto vale em geral: se os fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfos então $H^r(\mathbb{R}^m - F_1)$ é isomorfo a $H^r(\mathbb{R}^m - F_2)$ para todo $r \geq 0$.

Este fato resultará dos dois lemas seguintes. No Lema 2, consideramos $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. No Lema 3, $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e $F \subset \mathbb{R}^m$ é identificado com $F \times 0 \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

**Lema 2**. *Se os conjuntos fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfos então $\mathbb{R}^{2m} - (F_1 \times 0)$ e $\mathbb{R}^{2m} - (0 \times F_2)$ são homeomorfos.*

**Demonstração**: Sejam $\varphi\colon F_1 \to F_2$ e $\psi\colon F_2 \to F_1$ homeomorfismos, inversos um do outro. Pelo Teorema de Extensão de Tietze ([ETG], Cap.10), existem aplicações contínuas $\Phi, \Psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tais que $\Phi|F_1 = \varphi$ e $\Psi|F_2 = \psi$. Definamos as aplicações $h, k\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ pondo

$$h(x,y) = (x, y - \Phi(x)), \quad k(x,y) = (x - \Psi(y), y).$$

Vemos que $h$ e $k$ são homeomorfismos, cujos inversos $h^{-1}, k^{-1}\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ são dados por

$$h^{-1}(x,y) = (x, y + \Phi(x)) \quad \text{e} \quad k^{-1}(x,y) = (x + \Psi(y), y).$$

Afirmamos que o homeomorfismo $k \circ h^{-1}\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ transforma $F_1 \times 0$ em $0 \times F_2$. De fato, se $x \in F_1$ então $\Phi(x) = \varphi(x) \in F_2$, logo

$$k(h^{-1}(x,0)) = k(x, \varphi(x)) = (x - \Psi(\varphi(x)), \varphi(x)) = (0, \varphi(x)) \in 0 \times F_2\,.$$

Analogamente se vê que $\left(k \circ h^{-1}\right)^{-1}$ transforma $0 \times F_2$ em $F_1 \times 0$, logo o homeomorfismo $k \circ h^{-1}\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ transforma $\mathbb{R}^{2m} - (F_1 \times 0)$ em $\mathbb{R}^{2m} - (0 \times F_2)$. □

**Lema 3**. *Se $F \subset \mathbb{R}^m$ é fechado então, para todo $r > 0$, tem-se $H^r(\mathbb{R}^m - F) \approx H^{r+1}(\mathbb{R}^{m+1} - F)$. Quando $r = 0$, existe uma transformação linear sobrejetiva $H^0(\mathbb{R}^m - F) \to H^1(\mathbb{R}^{m+1} - F)$ cujo núcleo tem dimensão 1.*

**Demonstração**: Sejam

$$U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1};\ x \notin F \text{ ou } t > 0\} \text{ e}$$
$$V = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1};\ x \notin F \text{ ou } t < 0\}.$$

Então identificamos $U \cup V = \mathbb{R}^{m+1} - (F \times 0)$ com $\mathbb{R}^{m+1} - F$ e observamos que $U \cap V = [\mathbb{R}^m - F] \times \mathbb{R}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^m - F$.

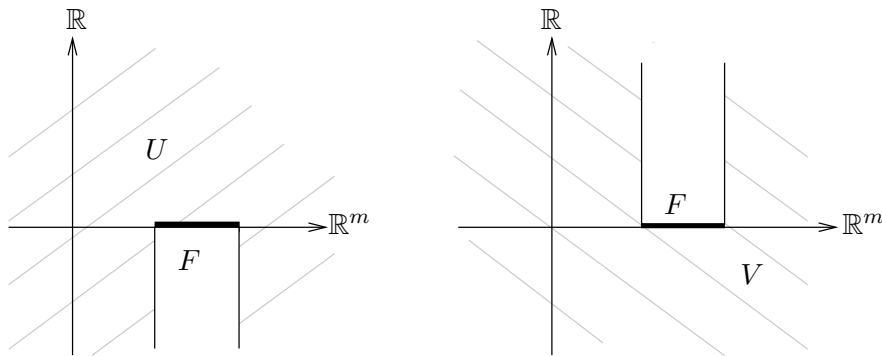



**Figura 5.**

Consideremos o seguinte trecho da seqüência de Mayer-Vietoris:

$$H^r(U) \oplus H^r(V) \to H^r(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^{r+1}(U \cup V) \to H^{r+1}(U) \oplus H^{r+1}(V).$$

Como $U$ e $V$ são contráteis, os extremos da seqüência acima são nulos quando $r > 0$, logo $\Delta$ é um isomorfismo: $H^r(\mathbb{R}^m - F) \approx H^{r+1}(\mathbb{R}^{m+1} - F)$.

Quando $r = 0$, a seqüência exata acima se escreve

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^1(U \cup V) \to H^1(U) \oplus H^1(V).$$

Levando em conta que $U$, $V$ são contráteis, que $H^0(U \cap V) = H^0(\mathbb{R}^m - F)$ e $H^1(U \cup V) = H^1(\mathbb{R}^{m+1} - F)$, ela se reduz a

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{A} H^0(\mathbb{R}^m - F) \xrightarrow{\Delta} H^1(\mathbb{R}^{m+1} - F) \to 0.$$

Lembremos que $H^0(M)$ é o conjunto das funções que são constantes em cada componente conexa de $M$, logo $H^0(M) = \mathbb{R}$ se $M$ é conexa. Assim, a transformação linear $A$ leva cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ na função constante $A(x, y) = x - y$ em $\mathbb{R}^m - F$. A imagem de $A$ (ou seja, o núcleo de $\Delta$) tem portanto dimensão 1. Além disso, $\Delta$ é sobrejetivo pois a última seta da seqüência é a transformação nula. □

**Teorema 8.** *Se os conjuntos fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfos então, para todo $r \geq 0$, os grupos $H^r(\mathbb{R}^m - F_1)$ e $H^r(\mathbb{R}^m - F_2)$ são isomorfos.*

**Demonstração**: Consideremos as três transformações lineares

$$H^r(\mathbb{R}^m - F_1) \to H^{r+m}(\mathbb{R}^{2m} - F_1) \to H^{r+m}(\mathbb{R}^{2m} - F_2) \to H^r(\mathbb{R}^m - F_2).$$

Se $r > 0$, todas elas são isomorfismos: a primeira e a terceira por $m$ repetidas aplicações do Lema 2 e a segunda por ser induzida pelo homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{2m} - F_1$ e $\mathbb{R}^{2m} - F_2$. Logo $H^r(\mathbb{R}^m - F_1)$ e $H^r(\mathbb{R}^m - F_2)$ são isomorfos. Novamente o uso do Lema 2, no caso $r = 0$, leva a transformações lineares sobrejetivas $H^0(\mathbb{R}^m - F_1) \to H^m(\mathbb{R}^{2m} - F_1)$ e $H^0(\mathbb{R}^m - F_2) \to H^m(\mathbb{R}^{2m} - F_2)$, ambas com núcleos unidimensionais. Como $\mathbb{R}^{2m} - F_1$ e $\mathbb{R}^{2m} - F_2$ são homeomorfos, segue-se que $H^0(\mathbb{R}^m - F_1)$ é isomorfo a $H^0(\mathbb{R}^m - F_2)$. □

Segue-se do Teorema 8 que se $\overline{B}$ é uma bola fechada em $\mathbb{R}^m$, com $m \geq 2$, e $f \colon \overline{B} \to X$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ então $\mathbb{R}^m - X$ é conexo.

**Teorema 9** (*Jordan-Brouwer.*) *Sejam $M, X \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos fechados homeomorfos. Se $M$ é uma hiperfície diferenciável conexa então:*

1) *$\mathbb{R}^m - X$ tem duas componentes conexas;*

2) *O complemento $\mathbb{R}^m - Y$ de todo conjunto fechado $Y$ propriamente contido em $X$ é conexo;*

3) *$X$ é a fronteira de ambas componentes conexas de $\mathbb{R}^m - X$.*

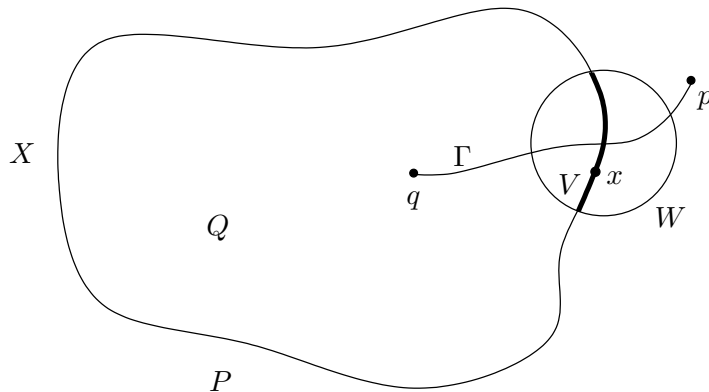
"main2"
2009/6/19
page 54



**Figura 6.**

**Demonstração**: 1) Segundo o Teorema 9 e o Apêndice do Capítulo 4 de [AR3], $\mathbb{R}^m - M$ tem duas componentes conexas, logo $H^0(\mathbb{R}^m - M) = \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema 6 acima, segue-se que $H^0(\mathbb{R}^m - X) = \mathbb{R}^2$, logo $\mathbb{R}^m - X$ tem duas componentes também.

2) Seja $Y_0 \subset M$ o subconjunto fechado que corresponde a $Y$ pelo homeomorfismo entre $M$ e $X$. Se $A$ e $B$ são as componentes conexas de $\mathbb{R}^m - M$ então, como $A \subset A \cup (M - Y_0) \subset A \cup M = \overline{A}$, resulta do Teorema 25, Capítulo 1 de [AR2] que $A \cup (M - Y_0)$ e (analogamente) $B \cup (M - Y_0)$ são conexos. Pelo mesmo teorema, $\mathbb{R}^m - Y_0 = [A \cup (M - Y_0)] \cup [B \cup (M - Y_0)]$ é conexo. Segue-se do Teorema 6 que $\mathbb{R}^m - Y$ é conexo.

3) Seja $\mathbb{R}^m - X = P \cup Q$ a expressão de $\mathbb{R}^m - X$ como reunião de suas componentes conexas. Como $P$ e $Q$ são abertos, nenhum ponto de um deles pode pertencer à fronteira de qualquer dos dois, logo $\text{fr.}\, P \cup \text{fr.}\, Q \subset X$. Mostraremos então que $X \subset \text{fr.}\, P \cap \text{fr.}\, Q$ e daí resultará que $X = \text{fr.}\, P = \text{fr.}\, Q$. Dado arbitrariamente $x \in X$, seja $W \subset \mathbb{R}^m$ um aberto contendo $x$. Veremos que $W$ deve conter pontos de $P$ e $Q$. Para isto, tomemos $p \in P$ e $q \in Q$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $W$ não contém $X$, de modo que, pondo $V = W \cap X$, o fechado $X - V$ é um subconjunto próprio de $X$ e então o aberto $\mathbb{R}^m - (X - V) = (\mathbb{R}^m - X) \cup V$ é conexo, logo conexo

por caminhos. Seja $\gamma\colon [0,1] \to (\mathbb{R}^m - X) \cup V$ um caminho ligando $p$ a $q$. Pondo $\Gamma = \{\gamma(t);\, t \in [0,1]\}$, vemos que $\varnothing \neq \Gamma \cap X = \Gamma \cap V$, logo $\Gamma \cap V$ é um compacto não-vazio. Seja $t_0$ o menor valor de $t$ tal que $\gamma(t) \in V$. Então $\gamma([0,t_0)) \subset P$ e $\gamma(t_0) \in V \subset W$. Para todos os valores de $t$ suficientemente próximos de $t_0$ tem-se $\gamma(t) \in W \cap P$, logo $x$ pertence à fronteira de $P$. Analogamente se mostra que $x$ pertence à fronteira de $Q$. □

**Exemplo 13**. Na Figura 7, o conjunto $X = C \cup I \cup J$ é formado pela circunferência $C$ mais dois pequenos segmentos de reta $I$, $J$, um apontando para dentro e outro para fora de $C$. $X$ é conexo e $\mathbb{R}^2 - X$ tem duas componentes conexas: uma com fronteira $C \cup I$ e outra com fronteira $C \cup J$. ▷

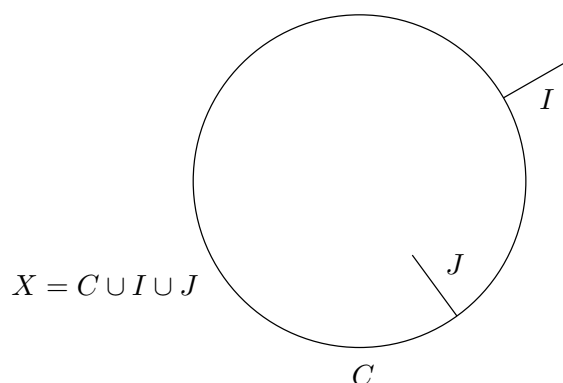



**Figura 7.**

Este exemplo é possível porque há subconjuntos próprios de $X$, como por exemplo $C$, tais que $\mathbb{R}^2 - C$ não é conexo, coisa que não acontece quando $X$ é homeomorfo a uma hiperfície fechada.

O teorema seguinte é um resultado clássico, que será provado como conseqüência direta do Teorema de Jordan-Brouwer.

**Teorema 10** (*Invariância dos abertos.*) *Se o conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é homeomorfo a um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ então $X$ é aberto.*

**Demonstração**: Seja $f\colon U \to X$ um homeomorfismo. O aberto $U$ pode ser expresso como reunião de bolas abertas $B$ tais que $\overline{B} \subset U$, logo $f$ aplica $\overline{B}$ homeomorficamente sobre $f(\overline{B})$. Basta então provar que a imagem $f(B)$ de cada uma delas é um aberto em $\mathbb{R}^m$. Isto é óbvio quando $m = 1$. Caso seja $m \geq 2$ e a esfera $S$ é o bordo de $B$ então $\overline{B} = B \cup S$, logo $\mathbb{R}^m = f(B) \cup f(S) \cup [\mathbb{R}^m - f(\overline{B})]$, reunião disjunta de conjuntos conexos. (V. Teorema 8.) Logo $\mathbb{R}^m - f(S) = f(B) \cup [\mathbb{R}^m - f(\overline{B})]$. Por outro lado, o Teorema de Jordan-Brouwer nos dá $\mathbb{R}^m - f(S) = A_1 \cup A_2$, como reunião de duas componentes conexas (abertas). Comparando as duas expressões

$$\mathbb{R}^m - f(S) = f(B) \cup [\mathbb{R}^m - f(\overline{B})] \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^m - f(S) = A_1 \cup A_2\,,$$

vemos que cada um dos conjuntos $f(B)$ e $\mathbb{R}^m - f(\overline{B})$, sendo conexo, está contido numa das componentes $A_1$, $A_2$. Deve-se ter então, digamos $f(B) \subset A_1$ e $\mathbb{R}^m - f(\overline{B}) \subset A_2$. Como $f(B) \cup [\mathbb{R}^m - f(\overline{B})] = A_1 \cup A_2$, segue-se que $f(B) = A_1$ e $\mathbb{R}^m - f(\overline{B}) = A_2$. Portanto $f(B)$ é aberto. □

**Corolário 1**. *Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ contínua e injetiva no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se o interior de $f(U)$ não for vazio então $m = n$ e $f$ é um homeomorfismo de $U$ sobre o aberto $f(U)$.*

Com efeito, tomando $Z = \text{int.}\, f(U)$ e $W = f^{-1}(Z)$ obteremos, por restrição, uma bijeção contínua $f\colon W \to Z$ entre os abertos $W \subset \mathbb{R}^m$ e $Z \subset \mathbb{R}^n$. Ora, $W$ é reunião enumerável de bolas fechadas, cada uma das quais é aplicada homeomorficamente por $f$ sobre um subconjunto compacto de $Z$. Pelo Teorema de Baire ([EM], pags. 190 e 191), pelo menos um desses compactos tem interior não-vazio. Chamando de $Z^o$ esse interior e $W^o$ sua imagem inversa obtemos, por restrição, um homeomorfismo $f\colon W^o \to Z^o$ entre o aberto $W^o \subset \mathbb{R}^m$ e o aberto $Z^o \subset \mathbb{R}^n$. Pela invariância da dimensão, tem-se $m = n$. Pelo Teorema 10, para cada bola fechada $\overline{B} \subset U$, a imagem $f(B)$ é aberta. Logo $f$ é um homeomorfismo de $U$ sobre $f(U)$ e $f(U)$ é aberto. □

A propósito do Corolário 1, é bem sabido, a partir do conhecido exemplo da curva de Peano ([EM], pag. 230), que uma aplicação contínua pode transformar um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ mesmo com $m < n$. O corolário acima assegura que uma tal aplicação não pode ser injetiva.

# 7 O Teorema de Dualidade de Poincaré

Em sua versão mais popular, o Teorema de Dualidade de Poincaré estabelece uma simetria entre os números de Betti $\beta_r = \dim H^r(M)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ de uma superfície compacta orientável $m$-dimensional $M$, expressa pelas igualdades $\beta_r = \beta_{m-r}$. Trata-se de um dos resultados mais tradicionais da Topologia. A fim de prová-lo também no caso em que $M$ não é compacta, utilizaremos a cohomologia com suportes compactos, à qual estenderemos a seqüência de Mayer-Vietoris.

Uma forma diferencial $\omega$ na superfície $M$ pode ter suporte compacto sem que sua restrição a um aberto $U \subset M$ tenha ainda essa propriedade. Por isso, a seqüência de Mayer-Vietoris associada a uma decomposição $M = U \cup V$ deve ser modificada no caso da cohomologia com suportes compactos. Em vez de restrição, considera-se a extensão a zero.

Seja $\omega \in \Lambda_c^r(U)$ uma $r$-forma com suporte compacto no aberto $U \subset M$. Sua *extensão a zero* em $M$ é a $r$-forma $\omega_M \in \Lambda_c^r(M)$ que coincide com $\omega$ em $U$ e é identicamente nula em $M - U$. Como $\omega$ já era nula desde uma distância positiva da fronteira de $U$, a forma $\omega_M$ é de classe $C^\infty$ em $M$, da mesma maneira como $\omega$ era em $U$.

Assim, dada uma decomposição $M = U \cup V$ da superfície $M$ como reunião dos abertos $U, V$, somos conduzidos à seqüência exata curta:

$$(*) \qquad 0 \to \Lambda_c^r(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} \Lambda_c^r(U) \oplus \Lambda_c^r(V) \xrightarrow{\beta} \Lambda_c^r(M) \to 0,$$

na qual $\alpha(\omega) = (\omega_U, \omega_V)$ e $\beta(\varphi, \psi) = \varphi_M - \psi_M$ onde, conforme a notação acima estabelecida, $\omega_U$, $\omega_V$, $\varphi_M$ e $\psi_M$ indicam as extensões a zero das formas $\omega$, $\varphi$ e $\psi$ nos novos domínios $U$, $V$ e $M$ respectivamente.

Nesta seqüência, é claro que $\alpha$ e $\beta$ são morfismos, isto é, $\alpha(d\omega) = d(\alpha(\omega))$ e $\beta(d\omega) = d(\beta(\omega))$. É também claro que $\alpha$ é injetivo e que sua imagem coincide com o núcleo de $\beta$. Para mostrar que (*) é, de fato, uma seqüência exata, resta provar que $\beta$ é sobrejetivo. Ora, dada $\omega \in \Lambda_c^r(M)$, seja $\xi_U + \xi_V = 1$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $M = U \cup V$. Definamos as formas $\varphi \in \Lambda_c^r(U)$ e $\psi \in \Lambda_c^r(V)$ pondo $\varphi = (\xi_U \cdot \omega)|U$ e $\psi = -(\xi_V \cdot \omega)|V$. Então, como os suportes de $\xi_U$ e $\xi_V$ são compactos contidos em $U$ e $V$ respectivamente, vemos que $\varphi$ e $\psi$ têm suportes compactos. É claro que $\beta(\varphi, \psi) = \omega$, portanto $\beta$ é sobrejetivo e a seqüência (*) é exata.

Daí obtemos a seqüência exata de cohomologia

$$\cdots \to H_c^r(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_c^r(U) \oplus H_c^r(V) \xrightarrow{\beta_*} H_c^r(M) \xrightarrow{\Delta} H_c^{r+1}(U \cap V) \to \cdots$$

chamada a *seqüência de Mayer-Vietoris com suportes compactos* associada à decomposição $M = U \cup V$.

Nela, os homomorfismos $\alpha_*$ e $\beta_*$ são induzidos de modo natural pelos morfismos $\alpha$, $\beta$. O homomorfismo $\Delta$ opera do seguinte modo:

Dada $[\omega] \in H_c^r(M)$, como o morfismo $\beta$ na seqüência (*) é sobrejetivo, existem formas $\varphi \in \Lambda_c^r(U)$ e $\psi \in \Lambda_c^r(V)$ que, quando estendidas a zero em $M$, cumprem $\varphi_M - \psi_M = \omega$. Em $U \cap V$ tem-se $\varphi_M = \varphi$ e $\psi_M = \psi$. Como $\omega$ é fechada, vale $0 = d\omega = d\varphi - d\psi$ em todos os pontos de $U \cap V$, ou seja, $d\varphi|(U \cap V) = d\psi|(U \cap V)$. Então $\Delta[\omega] = i^*[d\varphi_M] = i^*[d\psi_M]$, onde $i\colon U \cap V \to M$ é a aplicação de inclusão, portanto $i^*\colon H^r(M) \to H^r(U \cap V)$ é a restrição.

Notemos que $\varphi|(U \cap V)$ e $\psi|(U \cap V)$ não têm necessariamente suportes compactos, logo $d\varphi = d\psi$ pode não ser exata em $U \cap V$. Por outro lado, $d\varphi$ tem suporte compacto, contido em $U \cap V$, pois

"main2"
2009/6/19
page 59



em $U - V$ temos $0 = d\omega = d\varphi - d\psi = d\varphi$ porque supp. $\psi \subset V$. Analogamente, supp. $d\psi$ é compacto, contido em $U \cap V$. Isto confirma que a definição de $\Delta$ é legítima.

Considerando, a partir da seqüência de Mayer-Vietoris, os espaços vetoriais duais e as transformações lineares adjuntas $\alpha^{\mathsf{T}}$, $\beta^{\mathsf{T}}$ e $\Delta^{\mathsf{T}}$, obtemos a seqüência

$$\cdots \leftarrow H_c^r(U \cap V)^* \xleftarrow{\alpha^{\mathsf{T}}} H_c^r(U)^* \oplus H_c^r(V)^* \xleftarrow{\beta^{\mathsf{T}}} H_c^r(M)^* \xleftarrow{\Delta^{\mathsf{T}}} H_c^{r+1}(U \cap V)^* \leftarrow$$

a qual também é exata, pelo Teorema 2 do Capítulo I. (Estamos designando por $\alpha^{\mathsf{T}}$ e $\beta^{\mathsf{T}}$ as transformações lineares adjuntas de $\alpha_*$ e $\beta_*$ respectivamente.)

A demonstração do Teorema de Dualidade de Poincaré se baseia num morfismo de seqüências exatas que liga a seqüência de cohomologia de uma superfície orientada a esta seqüência de espaços vetoriais duais dos espaços $H_c^r(M)$, $H^r(U \cap V)$ etc., conforme veremos a seguir.

Seja $M$ uma superfície $m$-dimensional orientada. A *aplicação de dualidade de Poincaré* é a transformação linear

$$D_M \colon H^r(M) \to H_c^{m-r}(M)^*$$

que associa a cada $[\alpha] \in H^r(M)$ o funcional linear $D_M[\alpha] \in H_c^{m-r}(M)^*$, definido por

$$D_M[\alpha] \cdot [\beta] = \int_M \alpha \wedge \beta, \quad [\beta] \in H_c^{m-r}(M),\ 0 \le r \le m.$$

**Teorema de Dualidade de Poincaré**. *Para todo $r = 0, 1, \ldots, m$, $D_M$ é um isomorfismo.*

A demonstração faz uso dos três lemas abaixo.

**Lema 4**. *Se $M = U \cup V$, onde $U, V \subset M$ são abertos, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$
\begin{array}{ccc}
H^{r-1}(U) \oplus H^{r-1}(V) & \xrightarrow{D_U \oplus -D_V} & H_c^{m-r+1}(U)^* \oplus H_c^{m-r+1}(V)^* \\
\beta_* \big\downarrow & & \big\downarrow \alpha^\intercal \\
H^{r-1}(U \cap V) & \xrightarrow{D_{U \cap V}} & H_c^{m-r+1}(U \cap V)^* \\
\pm\Delta \big\downarrow & & \big\downarrow \Delta^\intercal \\
H^r(M) & \xrightarrow{D_M} & H_c^{m-r}(M)^* \\
\alpha_* \big\downarrow & & \big\downarrow \beta^\intercal \\
H^r(U) \oplus H^r(V) & \xrightarrow[D_U \oplus -D_V]{} & H_c^{m-r}(U)^* \oplus H_c^{m-r}(V)^* \\
\beta_* \big\downarrow & & \big\downarrow \alpha^\intercal \\
H^r(U \cap V) & \xrightarrow[D_{U \cap V}]{} & H_c^{m-r}(U \cap V)^*
\end{array}
$$

Neste diagrama, $\pm\Delta$ significa $(-1)^r\,\Delta$.

(Verificação a cargo do leitor.)

**Lema 5**. *Seja $\mathcal{B}$ uma base da topologia de $M$ tal que $U, V \in \mathcal{B} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{B}$. Se $D_U \colon H^r(U) \to H_c^{m-r}(U)^*$ é um isomorfismo para todo $U \in \mathcal{B}$ então $D_M \colon H^r(M) \to H^{m-r}(M)^*$ é um isomorfismo.*

**Demonstração**: Em três etapas, A, B e C:

A. Seja $\mathcal{B}'$ o conjunto das uniões finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Note-se que $W, Z \in \mathcal{B}' \Rightarrow W \cap Z \in \mathcal{B}'$. Pelo Lema dos Cinco, segue-se do Lema 4 que se $D_U$, $D_V$ e $D_{U \cap V}$ são isomorfismos, o mesmo ocorre com $D_{U \cup V}$. Então $D_W$ é um isomorfismo para todo $W \in \mathcal{B}'$.

B. Se $M = \bigcup M_\lambda$ é reunião disjunta de abertos não-vazios e cada $D_{M_\lambda}$ é um isomorfismo então $D_M$ é um isomorfismo. Com efeito, temos $H^r(M) = \prod_\lambda H^r(M_\lambda)$ e $H_c^r(M) = \bigoplus_\lambda H_c^r(M_\lambda)$, logo $H_c^r(M)^* = \prod_\lambda H_c^r(M_\lambda)^*$. Como $D_M(x_\lambda) = (D_{M_\lambda} \cdot x_\lambda)$, a afirmação segue-se.

C. A superfície $M$ pode ser expressa como reunião enumerável $M = \bigcup V_i$ de abertos $V_i \in \mathcal{B}'$ tais que $V_i \cap V_{i+j} = \varnothing$ se $j \geq 2$.

Para provar C, tomamos uma exaustão $M = \bigcup K_i$, $i \in \mathbb{N}$, onde cada $K_i$ é compacto e $K_i \subset \text{int.}\, K_{i+1}$ (cfr. [AR3], Cap.4, Lema 3). Definimos os abertos $V_i$ indutivamente. $V_1$ é a reunião dos elementos de uma cobertura finita de $K_1$ por abertos pertencentes a $\mathcal{B}$, escolhidos de modo a termos $K_1 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset \text{int.}\, K_2$. Por sua vez, $V_2$ é a reunião dos conjuntos de uma cobertura finita do compacto $K_2 - \text{int.}\, K_1$ por abertos pertencentes a $\mathcal{B}$, tomados de modo que se tenha $\overline{V}_2 \subset \text{int.}\, K_3$. Para $i \geq 3$, $V_i$ é a reunião dos conjuntos de uma cobertura finita do compacto $K_i - \text{int.}\, K_{i-1}$ por abertos pertencentes a $\mathcal{B}$, escolhidos de modo a ter-se $\overline{V}_i \subset \text{int.}\, K_{i+1}$ e $V_i \cap \overline{V}_{i-2} = \varnothing$.

Uma vez provadas A, B e C, consideramos as reuniões disjuntas $U = \bigcup V_{2i}$ e $V = \bigcup V_{2i-1}$. Temos $M = U \cup V$ e $U \cap V = \bigcup (V_i \cap V_{i+1})$. Então $D_U$, $D_V$ e $D_{U\cap V}$ são isomorfismos. (Note que $U \cap V$ também é reunião disjunta e $V_i \cap V_{i+1}$ pertence a $\mathcal{B}'$.) Segue-se do Lema dos Cinco que $D_M = D_{U\cup V}$ é um isomorfismo. Isto prova o Lema 5. $\square$

**Lema 6**. *Se $M = \mathbb{R}^m$ então $D_M$ é um isomorfismo.*

**Demonstração**: Quando $0 < r \leq m$, sabemos que $H^r(\mathbb{R}^m) = 0 = H_c^{m-r}(\mathbb{R}^m)^*$. Sabemos também que $H^0(\mathbb{R}^m) \approx R \approx H_c^m(\mathbb{R}^m)^*$. Basta portanto verificar que a transformação linear $D_{\mathbb{R}^m}\colon H^0(\mathbb{R}^m) \to H_c^m(\mathbb{R}^m)^*$ não é identicamente nula. Ora, se $\xi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável com suporte compacto e integral diferente de zero, pondo $\omega = \xi(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ temos $D_{\mathbb{R}^m}[1]\cdot[\omega] = \int_{\mathbb{R}^m} \omega \neq 0$.

Segue-se do Lema 5 que se $M \subset \mathbb{R}^m$ é um subconjunto aberto então $D_M$ é um isomorfismo. Basta tomar em $M$ uma base $\mathcal{B}$ formada por blocos retangulares abertos com arestas paralelas aos eixos. A interseção de dois desses blocos ainda é um deles e, para cada $U \in \mathcal{B}$, $D_U$ é um isomorfismo pois $U$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Logo $D_M$ é um isomorfismo.

Finalmente, seja $M$ uma superfície orientável qualquer de dimensão $m$. Consideremos a base $\mathcal{B}$ de $M$ formada por conjuntos difeomorfos a abertos de $\mathbb{R}^m$. Se $U, V \in \mathcal{B}$ então $U \cap V \in \mathcal{B}$ e cada $D_U$ é um isomorfismo.

**Corolário 2**. *Se $M$ é $m$-dimensional, conexa e não-compacta então $H^m(M) = 0$.*

Com efeito, neste caso tem-se $H_c^0(M) = 0$, logo $H^m(M) = 0$ quando $M$ é orientável, em virtude do Teorema de Dualidade de Poincaré. O caso não-orientável já foi tratado no Teorema 7. $\square$

**Corolário 3**. *Se uma superfície compacta orientável $M$ tem dimensão ímpar, sua característica de Euler é igual a zero.*

Com efeito, sendo $m$ ímpar, a característica de Euler $\chi(M)$ tem o valor

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \cdots - \beta_{m-2} + \beta_{m-1} - \beta_m \\ &= \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \cdots - \beta_2 + \beta_1 - \beta_0 = 0, \end{aligned}$$

levando em conta que $\beta_r = \beta_{m-r}$ .

# 8 O grau de uma aplicação

Sejam $M$, $N$ superfícies conexas, orientadas, de mesma dimensão $m$ e $f\colon M \to N$ uma aplicação própria, a qual induz uma transformação linear $f^*\colon H_c^m(N) \to H_c^m(M)$. Sabemos que, quando $M$ é conexa e orientada, a integração de formas com suporte compacto determina isomorfismos $\varphi\colon H_c^m(M) \to \mathbb{R}$, $\psi\colon H_c^m(N) \to \mathbb{R}$, onde $\varphi([\alpha]) = \int_M \alpha$ e $\psi[\beta] = \int_N \beta$. Por composição, obtemos a transformação linear $T = \varphi \circ f^* \circ \psi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(N) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(M) \\ \psi\big\downarrow & & \big\downarrow\varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow[T]{} & \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Como ocorre com toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $T$ é a multiplicação por um número real $\mathrm{gr}(f)$, chamado o *grau da aplicação* $f$. A igualdade $\varphi \circ f^* = T \circ \psi$ significa que

$$\int_M f^*\omega = \mathrm{gr}(f) \cdot \int_N \omega, \text{ para toda } \omega \in \Lambda_c^m(N).$$

Interpretando $f^*\omega$ como a expressão de $\omega$ após a mudança de variáveis dada por $f$, a igualdade acima apresenta-se como uma generalização do Teorema da Mudança de Variáveis para integrais múltiplas.

O grau é um invariante que desempenha papel crucial em Análise, Geometria etc. A seguir, veremos algumas de suas propriedades básicas. Antes, uma aplicação interessante à Topologia. Uma apresentação detalhada da teoria do grau, sem uso de cohomologia, pode ser vista em [CA2].

**Teorema 11**. *Sejam $M$, $N$ superfícies compactas conexas, orientadas, de mesma dimensão. Se a aplicação $f\colon M \to N$ tem grau $\neq 0$ então, para todo $r \geq 0$, a transformação linear induzida $f^*\colon H^r(N) \to H^r(M)$ é injetiva.*

**Demonstração**: Seja $0 \neq [\alpha] \in H^r(N)$. Devemos mostrar que $0 \neq f^*[\alpha] \in H^r(M)$. Pelo Teorema de Dualidade de Poincaré, o funcional linear $D_N[\alpha] \in H^{m-r}(N)^*$ é não-nulo, logo existe $[\beta] \in H^{m-r}(N)$ tal que $\int_N \alpha \wedge \beta = D_N[\alpha]\cdot[\beta] \neq 0$. Então

$$D_M[f^*\alpha]\cdot[f^*\beta] = \int_M f^*\alpha \wedge f^*\beta = \int_M f^*(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{gr}(f)\cdot \int_M \alpha \wedge \beta \neq 0,$$

portanto $[f^*\alpha] \neq 0$. $\square$

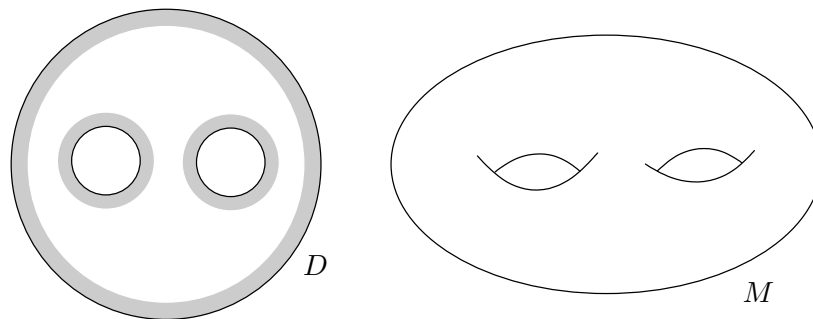
"main2"
2009/6/19
page 64



**Figura 8.** Colando duas cópias do disco aberto perfurado $D$ ao longo da parte hachurada, obtém-se a superfície $M$, de gênero 2.

**Exemplo 14**. Seja $M$ uma superfície bidimensional compacta, conexa, orientada, de gênero $g > 0$ (esfera com $g$ asas). É claro que $H^0(M) = H^2(M) = \mathbb{R}$. Além disso, $H^1(M) = \mathbb{R}^{2g}$, como se pode ver por Mayer-Vietoris, escrevendo $M = U \cup V$, onde $U$ e $V$ são difeomorfos a um disco aberto, do qual se omitiram $g$ discos fechados disjuntos, e $U \cap V$ é a reunião de $g+1$ anéis disjuntos. Então toda aplicação contínua $f\colon S^2 \to M$ tem grau zero, pois $H^1(S^2) = 0$.

O teorema seguinte resume as propriedades básicas do grau. Nele, as superfícies são conexas, orientadas, todas de mesma dimensão $m$, e as aplicação são próprias.

**Teorema 12.** (i) *Se $f, g\colon M \to N$ são propriamente homotópicas então* $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g)$;

(ii) *Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to P$ então* $\mathrm{gr}(g \circ f) = \mathrm{gr}(g)\cdot\mathrm{gr}(f)$;

(iii) *Se* $\mathrm{gr}(f) \neq 0$ *então $f\colon M \to N$ é sobrejetiva.*

**Demonstração**: (i) Sendo $f$ e $g$ propriamente homotópicas, temos $\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega$ para toda forma $\omega \in \Lambda_c^m(N)$, logo $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g)$.

(ii) Seja $\omega \in \Lambda_c^m(P)$ tal que $\int_P \omega \neq 0$. Então

$$\mathrm{gr}(g \circ f) \cdot \int_P \omega = \int_M (g \circ f)^*\omega = \int_M f^*(g^*\omega) = \mathrm{gr}(f) \cdot \int_N g^*\omega$$
$$= \mathrm{gr}(f)\cdot\mathrm{gr}(g) \cdot \int_P \omega,$$

logo $\mathrm{gr}(g \circ f) = \mathrm{gr}(g) \cdot \mathrm{gr}(f)$.

(iii) Como $f\colon M \to N$ é própria, sua imagem é um conjunto fechado em $N$. Se $f$ não fosse sobrejetiva, tomaríamos uma forma $\omega \in \Lambda_c^m(N)$, com suporte contido no aberto não-vazio $N - f(M)$, tal que $\int_N \omega \neq 0$. Então $f^*\omega = 0$, logo $\mathrm{gr}(f) = 0$. □

Outro fato de grande relevância sobre o grau de uma aplicação é que ele é um número inteiro que, em muitos casos, pode ser identificado sem grande dificuldade, graças à sua caracterização que mostraremos agora.

Lembremos que o ponto $y \in N$ chama-se um *valor regular* de uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ quando para todo $x \in f^{-1}(y)$ a derivada $f'(x)\colon T_xM \to T_yN$ é sobrejetiva. Se $\dim. M = \dim. N$, isto significa que $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in f^{-1}(y)$. Supondo $M$ e $N$ orientadas, diremos que o ponto $x \in f^{-1}(y)$ é *positivo*, e escreveremos $\varepsilon_x = +1$, quando o isomorfismo $f'(x)\colon T_xM \to T_yN$ preservar orientação. Se, entretanto, $f'(x)$ inverter orientação, diremos que $x \in f^{-1}(y)$ é um *ponto negativo* e escreveremos $\varepsilon_x = -1$. Supondo ainda que $f$ seja própria, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ do valor regular $y$ é um conjunto compacto formado por pontos isolados (pois, pelo Teorema da Função Inversa, $f$ é injetiva na vizinhança de cada ponto $x \in f^{-1}(y)$) logo é finito.

Dadas, portanto, as superfícies orientadas $M$, $N$, de mesma dimensão $m$, a aplicação diferenciável própria $f\colon M \to N$ e o valor regular $y \in N$, definiremos o *grau de $f$ no ponto $y$* como sendo o número inteiro $\mathrm{gr}_y(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon_x$.

**Teorema 13**. *Sejam $M$, $N$ superfícies conexas, orientadas, de mesma dimensão $m$. Seja ainda $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável própria. Então, para qualquer valor regular $y \in N$ de $f$ tem-se* $\mathrm{gr}_y(f) = \mathrm{gr}(f)$.

**Lema 7**. *Se $y \in N$ é um valor regular de $f$ então existe uma vizinhança aberta $V$ de $y$ em $N$ tal que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ é uma reunião disjunta de abertos em $M$, cada um dos quais se aplica por $f$ difeomorficamente sobre $V$.*

**Demonstração do Lema 7**: Sabemos que $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ é um conjunto finito. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, para cada $i = 1, \ldots, k$ existe um aberto $U_i'$, com $x_i \in U_i' \subset M$, que é aplicado por $f$ difeomorficamente sobre um aberto $V_i$, com $y \in V_i \subset N$. A aplicação própria $f$ transforma o fechado $F = M - (U_1' \cup \cdots \cup U_k')$ num subconjunto fechado $f(F) \subset N$ que não contém $y$. Seja $V \subset M$ um aberto tal que $y \in V \subset (V_1 \cap \cdots \cap V_k) \cap (N - f(F))$. Pondo $U_i = U_i' \cap f^{-1}(V)$, o Lema 7 fica demonstrado.

**Demonstração do Teorema 13**: Usando a notação do Lema, consideremos uma forma $\omega \in \Lambda_c^m(M)$, com suporte contido em $V$, tal que $\int_N \omega = \int_V \omega \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada $U_i$ é conexo, logo o difeomorfismo $f\colon U_i \to V$ preserva ou inverte orientação, conforme se tenha $\varepsilon_{x_i} = +1$ ou $\varepsilon_{x_i} = -1$. Segue-se que $\int_{U_i} f^*\omega = \varepsilon_{x_i} \cdot \int_V \omega$. Portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{gr}(f) \cdot \int_N \omega = \int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*\omega = \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_{x_i}\right) \cdot \int_V \omega \\ = \operatorname{gr}_y(f) \cdot \int \omega_N\,, \end{aligned}$$

conseqüentemente, $\operatorname{gr}(f) = \operatorname{gr}_y(f)$. □

Evidentemente, o Teorema 13 só tem interesse se existir em $N$ algum valor regular de $f$. Na verdade, quase todos os pontos de $N$ são valores regulares pois, em virtude do Teorema de Sard (cfr. [CA2], Cap. 6, Seção 2), o conjunto dos valores regulares de $f$ é denso em $N$, e até mesmo aberto quando $f$ é própria.

**Exemplo 15**. Um difeomorfismo entre superfícies conexas orientadas tem grau 1 quando preserva orientação e grau $-1$ quando

inverte. Uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tem grau 1 se $\det T > 0$, grau $-1$ se $\det T < 0$ e grau zero se $\det T = 0$. A aplicação antípoda $A\colon S^m \to S^m$, $A(x) = -x$, tem grau 1 se $m$ é ímpar e grau $-1$ se $m$ é par.

**Exemplo 16**. (Como de praxe, identificamos o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos com $\mathbb{R}^2$.) Se $f\colon U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa, sua derivada $f'(z)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear que consiste na multiplicação por um número complexo, também denotado por $f'(z)$. Logo, ou $f'(z) = 0$ ou o determinante jacobiano $\det f'(z)$ é positivo. Assim, se o ponto $w \in \mathbb{C}$ é valor regular de $f$ então $\mathrm{gr}_w(f)$ é o número de elementos em $f^{-1}(w)$. Consideremos, em particular, um polinômio $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de grau $n$. Sabe-se que $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, portanto $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma aplicação própria. Vamos mostrar que seu grau topológico $\mathrm{gr}(p)$ também é $n$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $p(z) = z^n + q(z)$, onde $q$ é um polinômio de grau $\leq n-1$. A aplicação $H\colon \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$, definida por $H(z,t) = z^n + (1-t)q(z)$, é uma homotopia própria entre $p$ e o polinômio $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dado por $\varphi(z) = z^n$. Como, para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{C}$, a equação $z^n = a$ tem exatamente $n$ raízes, temos $\mathrm{gr}(\varphi) = n$ e daí $\mathrm{gr}(p) = n$. Em particular, $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva e isto prova o Teorema Fundamental da Álgebra.

# 9 Cohomologia de um compacto

Aplicar-se apenas a superfícies é uma considerável restrição que sofre a cohomologia de deRham. Vamos agora estendê-la nos subconjuntos compactos do espaço euclidiano, usando idéias que remontam a Čech, Alexander e Spanier.

Consideremos um subconjunto compacto $K$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Por simplicidade, diremos às vezes apenas "vizinhança", para significar um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, contendo $K$.

Diremos que as $r$-formas $\alpha \in \Lambda^r(U)$ e $\beta \in \Lambda^r(V)$, definidas em vizinhanças de $K$, *têm o mesmo germe* quando existir uma vizinhança $W \subset U \cap V$ tal que $\alpha|W = \beta|W$, ou seja, quando $\alpha$ e $\beta$ coincidirem numa vizinhança menor $W$.

A relação "$\alpha$ e $\beta$ têm o mesmo germe" é uma equivalência no conjunto das $r$-formas definidas em vizinhanças de $K$. A classe de equivalência $\overset{\vee}{\alpha}$ da $r$-forma $\alpha \in \Lambda^r(U)$ segundo esta relação chama-se o *germe* de $\alpha$.

Assim, dadas $\alpha \in \Lambda^r(U)$ e $\beta \in \Lambda^r(V)$, tem-se $\overset{\vee}{\alpha} = \overset{\vee}{\beta}$ se, e somente se, $\alpha|W = \beta|W$ para alguma vizinhança $W \subset U \cap V$.

Diz-se que a forma $\alpha$ é um *representante* do germe $\overset{\vee}{\alpha}$. Dados os germes $\overset{\vee}{\alpha}$ e $\overset{\vee}{\beta}$, podemos sempre representá-los por formas $\alpha, \beta \in \Lambda^r(W)$, definidas na mesma vizinhança $W$.

O conjunto $C^r(K)$ dos germes de $r$-formas definidas em vizinhanças de $K$ é, de modo natural, um espaço vetorial relativamente às operações $\overset{\vee}{\alpha} + \overset{\vee}{\beta} = (\alpha + \beta)^\vee$ e $c \cdot \overset{\vee}{\alpha} = (c \cdot \alpha)^\vee$. $c \in \mathbb{R}$.

Podemos definir sem ambigüidade uma transformação linear $d{:}C^r(K) \to C^{r+1}(K)$ pondo $d\overset{\vee}{\alpha} = (d\alpha)^\vee$. É claro que $d \circ d = 0$, logo temos o complexo de cocadeias

$$C^0(K) \xrightarrow{d} C^1(K) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n(K) \longrightarrow 0.$$

Os grupos de cohomologia deste complexo, representados por $\mathcal{H}^r(K)$, serão chamados os *grupos de cohomologia do compacto* $K$. (Quando houver necessidade de sermos mais específicos, diremos "cohomologia de Čech-Alexander-Spanier".)

Usando a terminologia introduzida na Seção 5 do Capítulo I (mais especificamente no Exemplo 4), vemos que $C^r(K) = \varinjlim_U \Lambda^r(U)$ é o limite indutivo do sistema formado pelos espaços vetoriais $\Lambda^r(U)$, cujos índices são as vizinhanças $U \supset K$, quase-ordenadas pela inclusão reversa e, quando $U \supset V \supset K$, o homomorfismo $\varphi_{UV} : \Lambda^r(U) \to \Lambda^r(V)$ é a restrição. Os homomorfismos $d\colon C^r(K) \to C^{r+1}(K)$

definem o complexo de cocadeias $\mathcal{C}^*(K) = \lim_U \mathcal{C}^*(U)$ e as definições que vêm de ser dadas significam que $\mathcal{H}^r(K) = H^r(\mathcal{C}^*(K)) = $ $= H^r(\lim_U \mathcal{C}^*(U))$.

Ora, como vimos no final da Seção 5, Capítulo I, a operação de limite indutivo comuta com os grupos de cohomologia. Por conseguinte, $\mathcal{H}^r(K) = \lim_U H^r(\mathcal{C}^*(U))$.

Assim, uma maneira equivalente de definir $\mathcal{H}^r(K)$ consiste em considerar diretamente, para cada vizinhança $U \supset K$, os germes das classes de cohomologia em $H^r(U)$, duas classes $[\alpha] \in H^r(U)$ e $[\beta] \in H^r(V)$ possuindo o mesmo germe quando, para alguma vizinhança $W \subset U \cap V$ vale $[\alpha]|W = [\beta]|W$. Então $\mathcal{H}^r(K)$ é o conjunto dos germes das classes $[\alpha] \in H^r(U)$, $U \supset K$.

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto das vizinhanças de $K$. Se $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ é cofinal (isto é, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $K \subset W \subset U$) então $\mathcal{H}^r(K) = \lim_{W \in \mathcal{W}} H^r(W)$. Noutras palavras, para obter $\mathcal{H}^r(K)$ basta considerar um conjunto cofinal de vizinhanças de $K$.

**Exemplo 17.** Dado o compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, seja, para cada $k \in \mathbb{N}$, $W_k = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,K) < 1/k\}$. O conjunto $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_k, \dots\}$ é cofinal no conjunto $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças de $K$, logo $\mathcal{H}^r(K) = \lim_{k\to\infty} H^r(W_k)$. (Note que $W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k \supset \dots$.) ◁

Consideremos o caso em que $K \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície $m$-dimensional compacta. Na notação do exemplo acima, para todo $k$ suficientemente grande, $W_k$ é a vizinhança tubular de $1/k$ da superfície $K$. Então, para todo $s > k$, a inclusão $i\colon W_s \to W_k$ é uma equivalência homotópica, portanto a aplicação de restrição $i^*\colon H^r(W_k) \to H^r(W_s)$ é um isomorfismo. Por sua vez, cada projeção natural $\pi\colon W_k \to K$ também é uma equivalência homotópica e daí $\pi^*\colon \mathcal{H}^r(K) \to H^r(W_k)$ é um isomorfismo, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto nos permite concluir que, quando o compacto $K$ é uma superfície, $\mathcal{H}^r(K)$ coincide com a cohomologia de deRham $H^r(K)$.

Se o compacto $K$ está contido numa superfície $M$, ao definirmos $\mathcal{H}^r(K)$ podemos obter o mesmo resultado considerando $r$-formas definidas em vizinhanças de $K$ em $M$, em vez de abertos de $\mathbb{R}^n$.

Isto se mostra observando que se pode obter um conjunto cofinal de vizinhanças $W$ de $K$ em $\mathbb{R}^n$, todas contidas na mesma vizinhança tubular $V$ de $M$, tais que a projeção natural $\pi\colon V \to M$ é uma equivalência homotópica de cada uma dessas $W$ sobre um aberto $\pi(W) \subset M$ e os $\pi(W)$ formam um conjunto cofinal de vizinhanças de $K$ em $M$.

Uma conseqüência imediata desta observação é que se o compacto $K$ está propriamente contido numa superfície $m$-dimensional $M$ então, para todo $r \geq m$, temos $\mathcal{H}^r(K) = 0$ pois $H^r(U) = 0$ quando $r \geq m$ e $U \subset M$ é aberto. (Corolário 2.)

**Exemplo 18.** Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ a reunião de duas circunferências tangentes externamente ("algarismo oito"). As vizinhanças $V_k = \{z \in \mathbb{R}^2; d(z,K) < 1/k\}$ são, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ menos dois pontos, logo $H^0(V_k) = \mathbb{R}$, $H^r(V_k) = 0$ se $r > 1$ e $H^1(V_k) = \mathbb{R}^2$. (Cfr. Exemplo 4.) Além disso, cada aplicação de inclusão $V_{k+1} \to V_k$ é uma equivalência homotópica. Segue-se que $\mathcal{H}^0(K) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^1(K) = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{H}^r(K) = 0$ se $r > 1$. $\triangleleft$

**Teorema 14.** *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^s$ compactos. Toda aplicação contínua $f\colon K \to L$ induz, em cada dimensão $r \geq 0$, um homomorfismo $f^\vee\colon \mathcal{H}^r(L) \to \mathcal{H}^r(K)$ com as seguintes propriedades:*

*1) Se $g\colon L \to P$ é outra aplicação contínua entre compactos então $(g \circ f)^\vee = f^\vee \circ g^\vee\colon \mathcal{H}^r(P) \to \mathcal{H}^r(K)$ e $f^\vee = \mathrm{id}\colon \mathcal{H}^r(K) \to \mathcal{H}^r(K)$ se $f = \mathrm{id}\colon K \to K$.*

*2) Se $f, g\colon K \to L$ são homotópicas então $f^\vee = g^\vee$.*

**Demonstração:** O ponto crucial é provar a existência de $f^\vee$. Começamos usando o Teorema de Tietze [ETG, Cap. 10], segundo o qual existe uma aplicação contínua $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ tal que $F|K = f$. Fixemos em $\mathbb{R}^n$ um conjunto cofinal $\mathcal{U}$ de vizinhanças de $K$. Para

cada vizinhança $V \supset L$ em $\mathbb{R}^s$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F(U) \subset V$. Definimos o homomorfismo $F^\vee \colon \mathcal{H}^r(L) \to \mathcal{H}^r(K)$ pondo $F^\vee([\alpha]^\vee) = ((F|U)^*[\alpha])^\vee$, onde $(F|U)^* \colon H^r(V) \to H^r(U)$ é o homomorfismo induzido pela restrição $F|U \colon U \to V$. Não há dificuldade em verificar que esta definição de $F^\vee$ não depende da escolha do representante $[\alpha]$ na classe $[\alpha]^\vee$. Resta, entretanto, mostrar que se $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ for outra extensão contínua de $f$, tem-se $G^\vee = F^\vee$. Ora, dada $V \supset L$, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda bola aberta de raio $2\varepsilon$ e centro num ponto de $L$ está contida em $V$. Como $F(x) = G(x)$ para todo $x \in K$, podemos escolher a vizinhança $U \supset K$ de modo que, para todo $x \in U$ se tenha $d(F(x), L) < \varepsilon$ e $d(F(x), G(x)) < \varepsilon$. Então, para todo $x \in U$, os pontos $F(x)$, $G(x)$ pertencem a uma bola aberta de raio $< 2\varepsilon$ e centro em algum ponto de $L$ logo o segmento de reta $[F(x), G(x)]$ está contido em $V$. Por conseguinte $F, G \colon U \to V$ são linearmente homotópicos, donde $(F|U)^* = (G|U)^*$ e podemos, sem ambigüidade, definir o homomorfismo $\overset{\vee}{f} \colon \mathcal{H}^r(L) \to \mathcal{H}^r(K)$ usando qualquer extensão contínua $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ da aplicação $f \colon K \to L$.

As afirmações 1) e 2) são facilmente verificadas.

## 10 A seqüência exata de Čech-Alexander-Spanier

Seja $K$ um subconjunto compacto da superfície $m$-dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$. Temos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \Lambda_c^r(M - K) \xrightarrow{i} \Lambda_c^r(M) \xrightarrow{j} C^r(K) \longrightarrow 0,$$

onde $i$ é a extensão a zero e $j$ associa a cada $r$-forma seu germe relativamente a $K$, ou seja $j(\omega) = \overset{\vee}{\omega}$ para toda $\omega \in \Lambda^r(M)$. (Aqui, estamos fazendo uso da observação feita na seção anterior, segundo a qual, levando em conta que $K \subset M$, para definir $\mathcal{H}^r(K)$, podemos basear-nos em formas definidas em vizinhanças de $K$ em $M$ em vez de formas cujos domínios são abertos em $\mathbb{R}^n$.)

Evidentemente, $i$ é injetivo e $j \circ i = 0$. Além disso, se $\omega \in \Lambda_c^r(M)$ é tal que $j(\omega) = \overset{\vee}{\omega} = 0$ então existe uma vizinhança $U \supset K$ em $M$ tal que $\omega|U = 0$, logo supp. $\omega \subset M - K$ e daí $\omega = i(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda_c^r(M - K)$.

Para completar a verificação de que a seqüência curta acima é exata, basta portanto mostrar que $j$ é sobrejetivo.

Ora, dado o germe $\overset{\vee}{\omega} \in C^r(K)$, temos $\omega \in \Lambda^r(U)$, onde $U$ é uma vizinhança de $K$ em $M$. sem perda de generalidade, podemos supor $\overline{U}$ compacto. Tomamos $V$, $W$ abertos em $M$ com $K \subset V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$ e uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ tal que $f(V) = 1$ e $f(M - W) = 0$. Então a forma $\alpha = f \cdot \omega \in \Lambda_c^r(U)$ é tal que $\overset{\vee}{\alpha} = \overset{\vee}{\omega}$ (pois $\alpha|V = \omega|V$) e $\overset{\vee}{\alpha} = j(\alpha_0)$, onde $\alpha_0$ é a extensão de $\alpha$ a zero em $M - W$.

A seqüência exata curta acima dá origem à *seqüência* (*de Čech-Alexander-Spanier*) *de cohomologia do compacto* $K \subset M$, que é a seguinte:

$$\cdots \longrightarrow H_c^r(M-K) \xrightarrow{i_*} H_c^r(M) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}^r(K) \xrightarrow{\Delta} H_c^{r+1}(M-K) \longrightarrow \cdots$$

**Exemplo 19.** (Cohomologia do espaço projetivo complexo.) Usaremos a seqüência exata de um compacto a fim de mostrar que os grupos de cohomologia do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ são $H^r(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$ quando $r \in [0, 2n]$ é par e $H^r(\mathbb{C}P^n) = 0$ quando $r$ é ímpar ou $> 2n$. Isto será feito por indução em $n$. Precisaremos, além do fato de $\mathbb{C}P^n$ ser uma superfície compacta, conexa, orientável, de dimensão $2n$, saber que $\mathbb{C}P^1 = S^2$ e que $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ de tal modo que $\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$.

A igualdade $\mathbb{C}P^1 = S^2$ prova nossa afirmação para $n = 1$. Admitindo sua veracidade para $n - 1$, começamos escrevendo a seqüência exata do compacto $\mathbb{C}P^{n-1}$, contido na superfície $\mathbb{C}P^n$, da seguinte forma:

$$\cdots \to H^{r-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_c^r(\mathbb{R}^{2n}) \to H^r(\mathbb{C}P^n) \to H^r(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H^{r+1}(\mathbb{R}^{2n}) \to \cdots$$

Daí extraímos três seqüências exatas:

$r$ ímpar: $\quad 0 \to H^r(\mathbb{C}P^n) \to 0,$

$r$ par $\leq 2n-2$: $\quad 0 \to H^r(\mathbb{C}P^n) \to \mathbb{R} \to 0,$

$r$ par $= 2n$: $\quad 0 \to \mathbb{R} \to H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \to 0.$

Com isto, ficam determinados os grupos $H^r(\mathbb{C}P^n)$.

Resta agora, por completeza, dizer quem é $\mathbb{C}P^n$ e justificar a validez das propriedades admitidas.

Começamos observando que os pontos da esfera $S^{2n+1}$ podem ser vistos sob a forma $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$, onde cada $z_j \in \mathbb{C}$ e $\sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = 1$. Assim, fica claro como o grupo multiplicativo $S^1 = \{u \in \mathbb{C};\ |u| = 1\}$ opera sobre $S^{2n+1}$: para cada $u \in S^1$ e cada $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$, põe-se $u \cdot z = (uz_1, \ldots, uz_{n+1})$.

O *espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}P^n$ é definido como o espaço das órbitas desta ação de $S^1$ sobre $S^{2n+1}$. Ou seja, $\mathbb{C}P^n$ é o espaço quociente de $S^{2n+1}$ pela relação de equivalência que identifica $z \in S^{2n+1}$ com $u \cdot z$ para todo $u \in S^1$.

Podemos também dizer que $\mathbb{C}P^n$ é o espaço quociente de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ pela relação segundo a qual $z$ e $w$ são equivalentes se, e somente se, $w = \lambda \cdot z$, com $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Como é natural, consideramos $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ identificando cada $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ com $(z_1, \ldots, z_n, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, o que nos dá $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$. Então $\mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}$ é o conjunto das classes de equivalência $[z]$ dos pontos $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $z_{n+1} \neq 0$. A aplicação $\varphi\colon \mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}^n$, dada por $\varphi([z]) = (z_1/z_{n+1}, \ldots, z_n/z_{n+1})$ é bem definida e, na realidade, é um homeomorfismo, cujo inverso $\varphi^{-1}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}P^n - \mathbb{C}P^{n-1}$ é dado por $\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = [z_1, \ldots, z_n, 1]$.

Analogamente ao caso real (v.[AR3], pags. 66 e 134), podemos considerar o espaço projetivo complexo como uma superfície compacta e conexa de dimensão $2n$ em $\mathbb{R}^k$, onde $k = 4(n+1)^2$. Para isto, basta tomar a aplicação $f\colon S^{2n+1} \to \mathbb{R}^k$, que associa a cada $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$ a matriz complexa $f(z) = [z_i \cdot \bar{z}_j]$ de or-

dem $(n+1)\times(n+1)$. Vê-se facilmente que $f(z) = f(w) \Leftrightarrow w = u\cdot z$, $u \in S^1$, logo $f$ induz, por passagem ao quociente, um homeomorfismo entre $\mathbb{C}P^n$ e $f(S^{2n+1})$. A orientabilidade de $\mathbb{C}P^n$ resulta da igualdade $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$.

Resta mostrar que $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Para tal, usaremos a *fibração de Hopf*, um exemplo clássico em Topologia. A fibração de Hopf é uma aplicaçao diferenciável sobrejetiva $h\colon S^3 \to S^2$ que goza da seguinte propriedade: $h(z) = h(w)$ se, e somente se, existe $u \in S^1$ tal que $w = u\cdot z$. Segue-se daí que $S^2 = \mathbb{C}P^1$. Falta somente definir $h$. Um modo simples e elegante de fazer isso é usando quatérnios. (Vide [GFER], página 84.) $S^3$ é o conjunto (grupo multiplicativo) dos quatérnios de norma 1. Para cada $q \in S^3$, pomos $h(q) = q\cdot i\cdot q^{-1}$, onde $i$ é a segunda das unidades quaterniônicas 1, $i$, $j$, $k$. Se $q = a + bi + cj + dk$, um cálculo imediato, usando a tabela $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, mostra que a parte real do quatérnio $h(q) = q\cdot i\cdot q^{-1}$ é zero. Assim, $h(q)$ é, para todo $q \in S^3$, um imaginário puro, logo pode ser considerado como um elemento de $S^2$. A definição de $h$ deixa claro que $h(z) = h(w) \Leftrightarrow w = u\cdot z$ com $u \in S^1$.

A seqüência exata de um compacto serve ainda para provar o Teorema de Dualidade de Alexander, como veremos agora.

Seja $K$ um subconjunto compacto próprio ($\varnothing \neq K \neq M$) da superfície $m$-dimensional $M$. Na seqüência exata

$$\cdots \to H_c^r(M) \to \mathcal{H}^r(K) \to H_c^{r+1}(M-K) \to H_c^{r+1}(M)\ldots,$$

façamos a hipótese $H_c^r(M) = H_c^{r+1}(M) = 0$. Então obtemos a seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{H}^r(K) \to H_c^{r+1}(M-K) \to 0$$

e daí concluímos o isomorfismo $\mathcal{H}^r(K) \approx H_c^{r+1}(M-K)$.

Suponhamos, além disso, que $M$ seja orientável. Então, pela Dualidade de Poincaré $[H_c^{r+1}(M-K)]^* \approx H^{m-r-1}(M-K)$. Toman-

do duais no isomorfismo anterior, resulta então que

$$[\mathcal{H}^r(K)]^* \approx H^{m-r-1}(M-K).$$

Em particular, vemos que, para todo compacto não-vazio $K \subset \mathbb{R}^m$, vale o isomorfismo

$$[\mathcal{H}^r(K)]^* \approx H_c^{m-r-1}(\mathbb{R}^m - K)$$

para $0 \leq r < m-1$.

Vejamos o que acontece quando $r = m-1$.

Como $K$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, temos $\mathcal{H}^m(K) = 0$. Levando em conta que $H_c^{m-1}(\mathbb{R}^m) = 0$ e $H_c^m(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$, constatamos que a seqüência exata

$$H_c^{m-1}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{H}^{m-1}(K) \to H_c^m(\mathbb{R}^m - K) \to H_c^m(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{H}^m(K),$$

contida na seqüência de Čech-Alexander-Spanier, se reduz a

$$0 \to \mathcal{H}^{m-1}(K) \to H_c^m(\mathbb{R}^m - K) \to \mathbb{R} \to 0$$

e daí resulta que $H_c^m(\mathbb{R}^m - K) \approx \mathcal{H}^{m-1}(K) \oplus \mathbb{R}$. Tomando duais e usando a Dualidade de Poincaré, concluímos, finalmente, que

$$H^0(\mathbb{R}^m - K) \approx [\mathcal{H}^{m-1}(K)]^* \oplus \mathbb{R}.$$

Isto nos dá uma versão um pouco mais geral do Teorema de Jordan-Brouwer, segundo a qual, se $K$ é homeomorfo a uma hiperfície compacta (mesmo desconexa) em $\mathbb{R}^m$ então $\mathbb{R}^m - K$ possui uma componente conexa a mais do que $K$.

Também resulta desse isomorfismo que se $K$ é homeomorfo a uma superfície de dimensão $< m-1$ então $\mathbb{R}^m - K$ é conexo.

Consideremos agora o caso $r = 0$.

A seqüência exata

$$H_c^0(\mathbb{R}^m - K) \to H_c^0(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{H}^0(K) \to H_c^1(\mathbb{R}^m - K) \to H_c^1(\mathbb{R}^m)$$

reduz-se a

$$0 \to 0 \to \mathcal{H}^0(K) \to H^1_c(\mathbb{R}^m - K) \to H^1_c(\mathbb{R}^m).$$

Se $m > 1$, temos $H^1_c(\mathbb{R}^m) = 0$ e daí resulta que $\mathcal{H}^0(K) \approx H^1_c(\mathbb{R}^m - K)$. Portanto, tomando duais e aplicando a Dualidade de Poincaré, vemos que

$$[\mathcal{H}^0(K)]^* \approx H^{m-1}(\mathbb{R}^m - K) \quad \text{quando} \quad m > 1.$$

Eis uma observação que resulta deste isomorfismo: se $M \subset \mathbb{R}^m$ é um domínio compacto conexo com fronteira regular (= superfície $m$-dimensional compacta, conexa com bordo) e $\partial M$ é conexo então $H^{m-1}(M) = 0$. Com efeito, como $\partial M$ é conexo, vemos que $[\mathcal{H}^0(\partial M)]^* = \mathbb{R}$. Resulta então do isomorfismo $[\mathcal{H}^0(\partial M)]^* \approx H^{m-1}(\mathbb{R}^m - \partial M) \oplus \mathbb{R}$ que $H^{m-1}(\mathbb{R}^m - \partial M) = 0$. Pelo Teorema de Jordan-Brouwer, $\mathbb{R}^m - \partial M$ tem duas componentes conexas, uma das quais é $M - \partial M$. Logo $H^{m-1}(M - \partial M) = 0$. Ora, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $V = \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, M) < \varepsilon\}$ é uma "vizinhança tubular" de $M$, difeomorfa a $M - \partial M$ e a projeção $\pi \colon V \to M$ é uma equivalência homotópica. Portanto $H^{m-1}(M) \approx H^{m-1}(V) \approx H^{m-1}(M - \partial M) = 0$.

A superfície $M = \{x \in \mathbb{R}^3; 1 \leq |x| \leq 2\}$ é um domínio compacto com fronteira regular em $\mathbb{R}^3$ mas $H^2(M) = \mathbb{R}$. Isto é possível porque $\partial M = S[0;1] \cup S[0;2]$ é desconexa.

Os isomorfismos $[\mathcal{H}^r(K)]^* \approx H^{m-r-1}(\mathbb{R}^m - K)$ para $0 \leq r < m - 1$,

$$[\mathcal{H}^{m-1}(K)]^* \oplus \mathbb{R} \approx H^0(\mathbb{R}^m - K)$$
$$[\mathcal{H}^0(K)]^* \approx H^{m-1}(\mathbb{R}^m - K) \oplus \mathbb{R} \text{ se } m > 1,$$

constituem o chamado *Teorema de Dualidade de Alexander*.

O grupo $[\mathcal{H}^r(K)]^*$, dual da cohomologia de $K$, coincide com o $r$-ésimo grupo de homologia de Čech de $K$ com coeficientes em $\mathbb{R}$

e o Teorema de Dualidade de Alexander diz, sucintamente, que a homologia de dimensão $r$ de $K \subset \mathbb{R}^m$ concide com a cohomologia de dimensão $m - r - 1$ do seu complemento $\mathbb{R}^m - K$.

**Exemplo 20.** Seja $X = A \cup B \cup C \subset \mathbb{R}^2$, onde $A$ é o intervalo $[-1, 1]$ do eixo $y$, $B$ é o gráfico da função contínua $f\colon (0, 1/2\pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, e $C$ é um arco simples ligando os pontos $(0, -1)$ e $(1/2\pi, 0)$ sem tocar em nenhum outro ponto de $A \cup B$. O conjunto $X$ é compacto e conexo por caminhos. Além disso, dado qualquer $\varepsilon$ tal que $0 < \varepsilon < 1/2\pi$, se chamarmos de $B'$ o gráfico da restrição de $f$ ao intervalo $[\varepsilon, 1/2\pi]$, o conjunto $X' = A \cup B' \cup C$ é homeomorfo a um intervalo, logo é contrátil. Ora, todo caminho em $X$ está contido em $X'$ para algum $\varepsilon > 0$. Logo $X$ é simplesmente conexo. Entretanto, como mostraremos agora, tem-se $\mathcal{H}^1(X) = \mathbb{R}$. De fato, para todo $k$ suficientemente grande, a vizinhança $V_k = \{z \in \mathbb{R}^2; d(z, X) < 1/k\}$ é homeomorfa a $R^2 - \{0\}$, logo $H^1(V_k) = \mathbb{R}$. Além disso, sempre que $k < s$, a inclusão $i\colon V_s \to V_k$ é uma equivalência homotópica, logo a restrição $\varphi_{ks}\colon H^1(V_k) \to H^1(V_s)$ é um isomorfismo e daí $\mathcal{H}^1(X) = \lim\limits_{k\to\infty} H^1(V_k) = \mathbb{R}$. Este simples exemplo ilustra o fato geral de que a cohomologia $\mathcal{H}^r(K)$ se adapta bem a conjuntos exóticos, fornecendo informações não detectadas por invariantes mais tradicionais como o grupo fundamental e a cohomologia singular.

**Exemplo 21.** (A solenóide.) Seja $T \subset \mathbb{R}^3$ o toro sólido padrão, gerado pela rotação, em torno do eixo $Oz$, de um disco vertical de raio $< 1$, cujo centro descreve a circunferência $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$. Consideremos outro toro sólido $T'$, contido no interior de $T$, o qual é a reunião disjunta de discos de mesmo raio, cujos centros descrevem uma curva diferenciável fechada $C'$, que dá duas voltas em torno do eixo vertical $Oz$. (Ver figura.) A projeção de cada um dos discos acima mencionados sobre seu centro define equivalências homotópicas $T \to C$ e $T' \to C'$, portanto $H^1(T)$ e

$H^1(T')$ são espaços vetoriais de dimensão 1. Como bases desses espaços, tomamos as classes de cohomologia das formas fechadas $\omega \in \Lambda^1(T)$ e $\omega' \in \Lambda^1(T')$ tais que $\int_C \omega = 1$ e $\int_{C'} \omega' = 1$. Por exemplo, podemos tomar $\omega(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)$ e assim, para cada caminho fechado $\gamma$ em $T$ a integral $\int_\gamma \omega$ é igual ao número de voltas que $\gamma$ dá em torno do eixo $Oz$. Considerando a aplicação de inclusão $i\colon T' \to T$, vemos que $i \circ C'$ é uma curva em $T$ que dá duas voltas em torno do eixo $Oz$, portanto $\int_{i\circ C'} \omega = 2$. Assim, o homomorfismo induzido $i^*\colon H^1(T) \to H^1(T')$ é tal que $\int_{C'} i^*\omega = \int_{i\circ C'} \omega = 2 = 2 \cdot \int_{C'} \omega$. Segue-se que $i^*[\omega] = 2 \cdot [\omega']$, logo $i^*\colon H^1(T) \to H^1(T')$ é um isomorfismo.

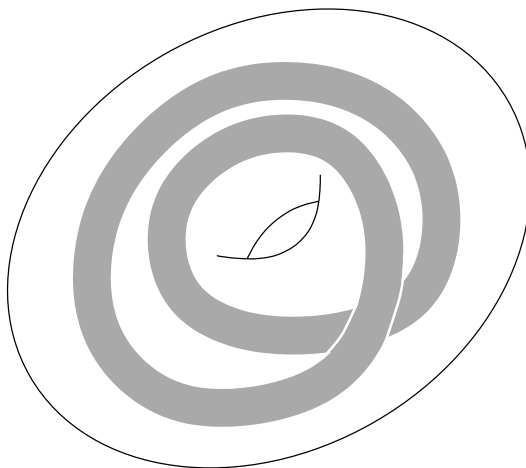



**Figura 10.** Um toro dando duas voltas dentro de outro; primeira etapa da construção do solenóide.

Iterando a construção acima, obtemos uma seqüência decrescente $T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_k \supset \ldots$ de toros sólidos tridimensionais, cada um deles dando duas voltas no interior do precedente. A interseção $S = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} T_k$ chama-se uma *solenóide.*

A solenóide $S$ é um conjunto compacto, conexo e não-vazio. [CA2, pags.59 e 65.]

É claro que $\mathcal{H}^0(S) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{H}^r(S) = 0$ se $r \geq 2$. A fim de determinar $\mathcal{H}^1(S)$, consideramos, para cada $k \in \mathbb{N}$, o aberto $V_k = \operatorname{int.} T_k$. Então $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_k \supset \ldots$ é um conjunto cofinal de vizinhanças de $S$. (Vide [CA2], pag.50.) Cada inclusão $j\colon V_k \to T_k$ é uma equivalência homotópica, logo $H^1(V_k)$ tem dimensão 1 e, além disso, cada aplicação de restrição $H^1(V_k) \to H^1(V_{k+1})$ é um isomorfismo, portanto $\mathcal{H}^1(S) = \lim\limits_{k\to\infty} H^1(V_k)$ tem dimensão 1.

# Capítulo III

# Homologia Simplicial

Veremos neste capítulo o segundo exemplo de um complexo de cadeias associado a um espaço topológico, a saber, o complexo simplicial. Com ele, definiremos os grupos de homologia e cohomologia de um poliedro e, mais geralmente, de um espaço topológico triangulável, isto é, homeomorfo a um poliedro.

Trata-se de uma situação mais abrangente do que a cohomologia de
deRham, em primeiro lugar porque toda superfície diferenciável é triangulável. (Vide [M].) Em segundo lugar, porque esses grupos (que, na realidade, são módulos) podem ser tomados com coeficientes num anel comutativo arbitrário. Poderíamos acrescentar ainda que disporemos de homologia, além da cohomologia, mas devemos admitir que, no capítulo anterior, a homologia ocorreu disfarçada, como dual da cohomologia nos teoremas de dualidade de Poincaré e de Alexander.

## 1 Poliedros

Diz-se que $a_0, a_1, \ldots, a_r$ em $\mathbb{R}^n$ são *pontos independentes* quando os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_r - a_0$ são linearmente independentes.

Como se vê sem dificuldade, esta definição não depende da ordem em que os pontos foram listados inicialmente.

**Exemplo 1.** Dois pontos distintos são independentes. Três pontos são independentes quando são não-colineares e quatro pontos independentes são pontos não-coplanares. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, os pontos $0, e_1, \ldots, e_n$ são independentes. O número máximo de pontos independentes em $\mathbb{R}^n$ é $n+1$.

Uma *combinação afim* de pontos $a_0, a_1, \ldots, a_r$ em $\mathbb{R}^n$ é uma expressão do tipo $p = \alpha_0 \cdot a_0 + \alpha_1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha_r \cdot a_r$ com $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 1$. Se, além disso, tivermos $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_r \geq 0$, diremos que $p$ é uma *combinação convexa* dos pontos $a_0, a_1, \ldots, a_r$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de $X$ ainda pertence a $X$.

O conjunto de todas as combinações convexas de um conjunto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo. Ele é chamado a *envoltória convexa* de $X$ e está contido em qualquer conjunto convexo que contenha $X$. Neste sentido, a envoltória convexa de $X$ é o menor conjunto convexo contendo $X$. Podemos descrevê-la como a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm $X$.

**Teorema 1.** *Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_r$ pontos de $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$a_0, a_1, \ldots, a_r$ são pontos independentes;*

(2) *Se as combinações afins $p = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i a_i$ e $q = \sum_{i=0}^{r} \beta_i a_i$ são iguais então $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_r = \beta_r$.*

**Demonstração:** Supondo (1), admitamos que $p = q$. Fazendo as substituições $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)$ e $\beta_o = 1 - (\beta_1 + \cdots + \beta_r)$, obtemos

$$a_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (a_i - a_0) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \beta_i (a_i - a_0),$$

portanto $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_r = \beta_r$, pois os vetores $a_1 - a_0, \ldots, a_r - a_0$ são linearmente independentes. Conseqüentemente $\alpha_0 = \beta_0$ e assim (1) $\Rightarrow$ (2).

Reciprocamente, supondo (2) verdadeira, admitamos por absurdo que um dos vetores $a_i - a_0$ seja combinação linear dos demais, digamos que se tenha

$$a_1 - a_0 = \alpha_2(a_2 - a_0) + \cdots + \alpha_r(a_r - a_0),$$

ou seja, que $a_1 = (1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)a_0 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r$.

Os dois membros desta última igualdade nos dão duas combinações afins dos pontos $a_0, a_1, \ldots, a_r$, as quais são iguais porém têm coeficientes diferentes, o que contraria a hipótese (2). Portanto (2) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_r$ pontos independentes em $\mathbb{R}^n$. O *simplexo* $r$-dimensional que tem estes pontos como vértices é o conjunto $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle$ de todas as combinações convexas $p = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i a_i$, ou seja, é a envoltória convexa do conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_r\}$.

Se $p = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i a_i \in s$ com $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_r \geq 0$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 1$, os números $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ chamam-se as *coordenadas baricêntricas* do ponto $p$. Se todas as coordenadas baricêntricas do ponto $p \in s$ são positivas, diz-se que $p$ é um *ponto interior* de $s$. O conjunto dos pontos interiores de $s$ é convexo e constitui o que se chama um *simplexo aberto*. Os pontos de $s$ que não são interiores, ou seja, que têm alguma coordenada baricêntrica nula, formam o *bordo* de $s$.

Fixado um subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subset \{0, 1, \ldots, r\}$, o simplexo $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \rangle$ é chamado uma *face* de $s$. Em particular, cada vértice de $s$ é uma face (de dimensão zero). Para cada $i = 0, 1, \ldots, r$, a face $s_{(i)} = \langle a_0, a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r \rangle$ chama-se a *face oposta* ao vértice $a_i$.

**Observação.** As denominações de *ponto interior*, *simplexo aberto*, etc, têm significados referentes ao simplexo e não ao espaço euclidiano que o contém. Por exemplo, se $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ são pontos não-colineares, $p = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ é um ponto interior do simplexo (triângulo) $s = \langle a, b, c\rangle$ mas, considerando $s$ como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, seu interior é vazio. Do lado positivo, se $a_0, a_1, \ldots, a_r$ são pontos independentes em $\mathbb{R}^n$ e $V$ é a variedade afim ($r$-dimensional) por eles gerada então o simplexo aberto que tem esses pontos como vértices é um subconjunto aberto de $V$ e os pontos interiores do simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r\rangle$ pertencem ao interior (topológico) de $s$ em $V$.

Dado um conjunto convexo arbitrário $C \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que $p \in C$ é um *ponto extremo* de $C$ quando $p$ não pertence a segmento de reta aberto algum contido em $C$. Por exemplo, se $B$ é uma bola fechada em relação à norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e a esfera $S$ é o bordo de $B$ então todo ponto de $S$ é um ponto extremo do conjunto convexo $B$. É claro que nenhum ponto interior a $C$ pode ser extremo.

**Teorema 2.** *Os pontos extremos do simplexo* $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r\rangle$ *são os seus vértices.*

**Demonstração:** Em primeiro lugar, se $p \neq q$ pertencem a $s$, um ponto interior do segmento de reta $[p, q]$ é da forma $(1-t)p+tq$ com $0 < t < 1$, logo nenhuma de suas coordenadas baricêntricas pode ser igual a 1. Portanto esse ponto não é vértice de $s$ e assim todo $a_i$ é extremo. Reciprocamente, se $p \in s$ não é vértice de $s$ então, chamando de $t$ a face de $s$ de menor dimensão que contém o ponto $p$, temos $\dim t > 0$ e $p$ pertence ao interior de $t$. Logo $p$ não é um ponto extremo de $t$ e, conseqüentemente, não é um ponto extremo de $s$. □

O teorema acima caracteriza, de forma intrínseca e unívoca, os vértices de um simplexo.

Um *poliedro* é um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, no qual foi especificada uma coleção finita de simplexos de $\mathbb{R}^n$, chamados os *simplexos de* $K$, de modo que as condições abaixo são satisfeitas:

1) Todo ponto de $K$ pertence a algum simplexo de $K$ (ou seja, $K$ é a reunião dos seus simplexos);

2) Toda face de um simplexo de $K$ é ainda um simplexo de $K$;

3) Se $s$ e $t$ são simplexos de $K$ então $s \cap t$ é vazio ou é uma face comum a $s$ e $t$ (e portanto é um simplexo de $K$).

Por abuso de notação, escreveremos $s \in K$ quando $s$ for um simplexo de $K$.

**Exemplo 2.** O poliedro mais simples é um simplexo, juntamente com suas faces. Em dimensões 0, 1, 2 e 3, ele é respectivamente um ponto, um segmento de reta, um triângulo ou um tetraedro. $\triangleleft$

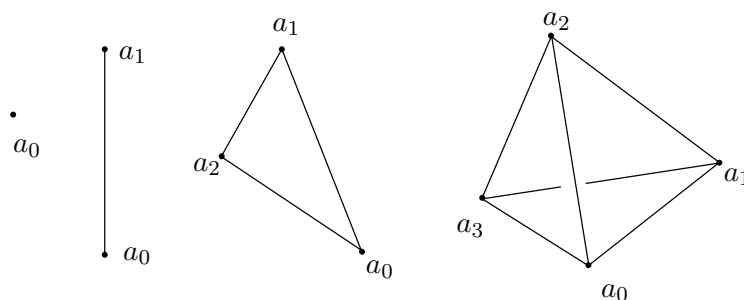



**Figura 11**. Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.

Todo ponto de um poliedro $K$ pertence ao interior de um único simplexo de $K$, a saber, o simplexo de dimensão mínima que contém esse ponto. Segue-se de 3) que se $s$ e $t$ são simplexos de $K$ então o interior de $s$ e o interior de $t$ coincidem (se $s = t$) ou são disjuntos. Por isso, um poliedro pode também ser definido como uma reunião finita de simplexos abertos, dois a dois disjuntos, tais que cada face de um desses simplexos é ainda um deles.

A *dimensão* de um poliedro é a maior dimensão de um dos seus simplexos.

Um *subpoliedro* do poliedro $K$ é um poliedro $L$ cujos simplexos são também simplexos de $K$.

Uma aplicação $f\colon K \to L$ do poliedro $K$ no poliedro $L$ chama-se *simplicial* quando, para todo simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle \in K$, as imagens $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_r)$ são vértices de um mesmo simplexo $t \in L$ e, além disso, para todo ponto $p = \sum \alpha_i \cdot a_i$ em $s$, tem-se $f(p) = \sum \alpha_i \cdot f(a_i) \in t$.

Toda aplicação simplicial $f\colon K \to L$ é contínua, pois $K$ é uma reunião finita de conjuntos compactos (seus simplexos), restrita a cada um dos quais $f$ é contínua.

A fim de definir uma aplicação simplicial $f\colon K \to L$ basta especificar a imagem $f(a)$ de cada vértice $a \in K$ contanto que, para todo simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle \in K$, os pontos $f(a_0), f(a_1), \ldots,$ $f(a_r)$ sejam vértices (não necessariamente distintos) de um mesmo simplexo $t \in L$.

O *esqueleto $r$-dimensional* de um poliedro $K$ é o subpoliedro $K^r$ formado pelos simplexos de $K$ que têm dimensão $\leq r$.

Por exemplo, se $K$ é o poliedro que se resume a um único simplexo $(n+1)$-dimensional $s$, com suas faces, seu esqueleto $n$-dimensional $K^n$ é o bordo do simplexo $s$, portanto é homeomorfo à esfera $S^n$. Isto mostra que a esfera $S^n$ é um *espaço triangulável*, isto é, homeomorfa a um poliedro. Uma *triangulação* (homeomorfismo) $f\colon K^m \to S^n$ é, por exemplo, a projeção central a partir do baricentro de $s$.

No que se segue, ocorrerão alguns outros exemplos de espaços trianguláveis, os quais trataremos como poliedros, inclusive calculando a homologia simplicial dos mesmos. Ainda neste capítulo, mostraremos que essa homologia não depende da triangulação considerada.

Diz-se que os poliedros $K$ e $L$ são isomorfos quando existem aplicações simpliciais $f\colon K \to L$ e $g\colon L \to K$ tais que $g \circ f = \mathrm{id}_K$ e $f \circ g = \mathrm{id}_L$. Então $f$ e $g$ são isomorfismos, um inverso do outro.

A fim de obter um isomorfismo entre os poliedros $K$ e $L$, basta estabelecer uma bijeção entre os vértices de $K$ e os de $L$, de tal modo que a vértices de $K$ pertencentes ao mesmo simplexo correspondam vértices de $L$ que também estão num mesmo simplexo.

Por isso um poliedro fica determinado (a menos de um isomorfismo) pelo esquema simplicial por ele definido.

Um *esquema simplicial* é um conjunto finito $\mathcal{K}$, cujos elementos são chamados *vértices*, juntamente com uma família $\Phi$ de subconjuntos não-vazios de $\mathcal{K}$, chamados *simplexos*, com as seguintes propriedades:

1) $\mathcal{K} = \bigcup_{s \in \Phi} s$;

2) Se $s \in \Phi$ e $t$ é um subconjunto não-vazio de $s$ então $t \in \Phi$.

Se $s \in \Phi$ tem $r + 1$ elementos, dizemos que o simplexo $s$ tem dimensão $r$. Se $(\mathcal{K}, \Phi)$ e $(\mathcal{L}, \Psi)$ são esquemas simpliciais, uma aplicação $f \colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ chama-se *simplicial* quando $f(\Phi) \subset \Psi$. Um *isomorfismo* entre os esquemas $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ é uma aplicação simplicial bijetiva $f \colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$. (A inversa $f^{-1} \colon \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ é necessariamente simplicial.)

O exemplo mais imediato de um esquema simplicial é aquele definido por um poliedro $K$. Os elementos de $\mathcal{K}$ são os vértices de $K$ e um simplexo de $\mathcal{K}$ é o conjunto dos vértices de um simplexo de $K$. Num certo sentido, este é o exemplo mais geral.

Com efeito, dado o esquema simplicial $\mathcal{K} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ consideremos, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e o poliedro $K$ cujos vértices são os pontos $e_i$ e cujos simplexos são os $s = \langle e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \rangle$ tais que $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$ é um simplexo de $\mathcal{K}$. Então o esquema do poliedro $K$ é obviamente isomorfo a $\mathcal{K}$. Dizemos neste caso, que $K$ é a *realização geométrica* do esquema simplicial $\mathcal{K}$.

**Exemplo 3.** Seja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ uma cobertura finita do espaço topológico $X$. (Geralmente, $X$ é compacto e $\mathcal{U}$ é aberta

mas a definição geral não faz uso destas hipóteses.) O *nervo* da cobertura $\mathcal{U}$ é o esquema simplicial $N(\mathcal{U})$ cujos vértices são os elementos $U_i$ da cobertura dada e cujos simplexos são os conjuntos $s = \{U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}\}$ tais que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_r} \neq \varnothing$. Quando $X$ é compacto e $\mathcal{U}$ é aberta, a realização geométrica do nervo $N(\mathcal{U})$ é pensada como uma aproximação poliedral de $X$. (Tanto mais aproximada quanto mais fina é a cobertura $\mathcal{U}$.) Este é o passo inicial para a definição da homologia de Čech. ◁

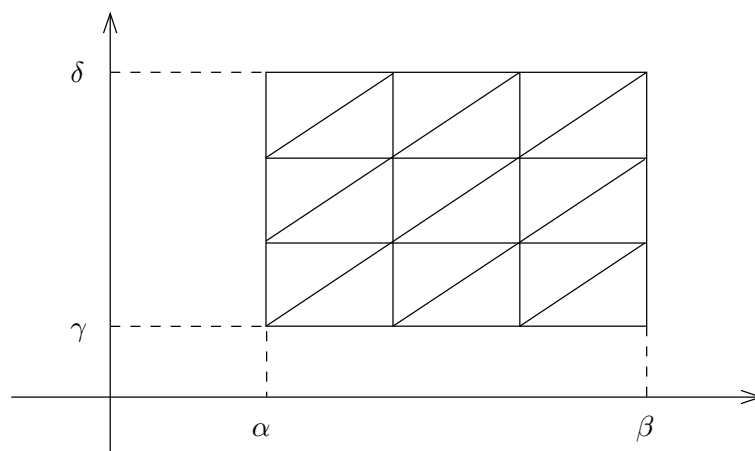



**Figura 12.**

**Exemplo 4.** O toro $T^2$ pode ser pensado como o espaço quociente de um retângulo pela relação de equivalência que identifica cada lado com o lado oposto mantendo as orientações. Mais explicitamente, se o retângulo é $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, as identificações são $(x, \gamma) \equiv (x, \delta)$ e $(\alpha, y) \equiv (\beta, y)$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$ e todo $y \in [\gamma, \delta]$. O esquema indicado na Figura 12 mostra uma triangulação do toro que o exibe como um poliedro com 9 vértices, 27 arestas (simplexos de dimensão 1) e 18 faces (simplexos de dimensão 2). ◁

**Exemplo 5.** O plano projetivo $P^2$, visto como o espaço quociente de um disco plano pela relação de equivalência que identifica

cada ponto do bordo com o seu antípoda, pode ser considerado, na forma indicada pela Figura 13, como um poliedro com 9 vértices, 24 arestas e 16 faces. Na verdade, a figura define com precisão um esquema abstrato cuja realização geométrica é um poliedro

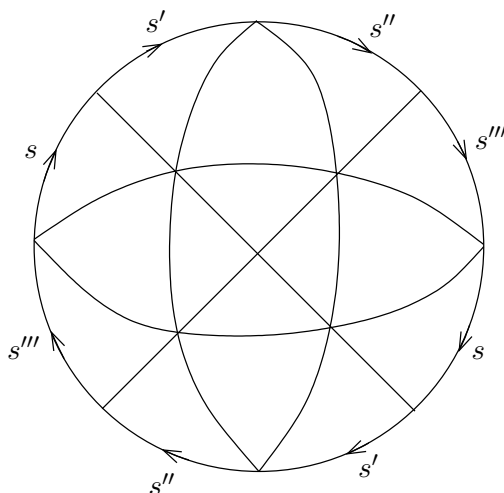



**Figura 13.**

homeomorfo a $P^2$. Como é uma superfície bidimensional compacta não-orientável, sabemos que $P^2$ não pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$. $\triangleleft$

## 2 O complexo simplicial

Existem $(r+1)!$ maneiras de ordenar os vértices de um simplexo de dimensão $r$. Consideremos equivalentes duas dessas ordenações quando uma delas puder ser obtida da outra por meio de uma permutação par dos $r+1$ vértices. Há duas classes de equivalência segundo esta relação. Cada uma dessas classes chama-se uma *orientação* do simplexo. Orientar um simplexo é dotá-lo de uma dessas duas orientações possíveis. (Isto pressupõe $r > 0$. Se $r = 0$, orientar um ponto é apenas precedê-lo do sinal $+$ ou do sinal $-$.)

Escreveremos $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ para indicar o simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle$ munido da orientação determinada pela ordem $a_0 < a_1 < \cdots < a_r$. O mesmo simplexo, quando munido da outra orientação (chamada orientação *oposta*), será indicado com $-\boldsymbol{s}$.

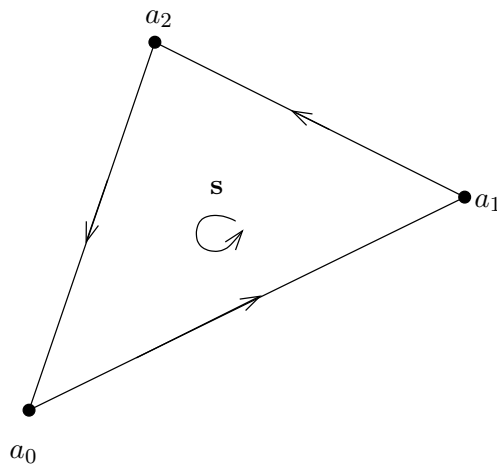
Assim, por exemplo, se tomarmos no triângulo $s = \langle a, b, c \rangle$ a orientação $\boldsymbol{s} = [a, b, c]$, a orientação oposta será $-\boldsymbol{s} = [b, a, c]$. Note que $[a, b, c] = [c, a, b] = [b, c, a] = -[a, c, b] = -[b, a, c] = -[c, b, a]$. Analogamente, as duas orientações possíveis do tetraedro $s = \langle a, b, c, d \rangle$ são $\boldsymbol{s} = [a, b, c, d]$ e $-\boldsymbol{s} = [b, a, c, d]$.

$\mathbf{s} = [a_0, a_1, a_2], \mathbf{s}_{(0)} = [a_1, a_2], \mathbf{s}_{(1)} = [a_2, a_0], \mathbf{s}_{(2)} = [a_0, a_1]$

**Figura 14.**

Dado o simplexo orientado $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$, a *orientação induzida* por $\boldsymbol{s}$ na face $s_{(0)} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$, oposta ao vértice $a_0$, é $\boldsymbol{s}_{(0)} = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$. Levando em conta que $[a_i, a_0, a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r] = (-1)^i \boldsymbol{s}$, segue-se que a orientação induzida por $\boldsymbol{s}$ na $i$-ésima face $\boldsymbol{s}_{(i)} = \langle a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r \rangle$ é $\boldsymbol{s}_{(i)} = (-1)^i [a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r]$.

Quando orientamos um simplexo $r$-dimensional, suas faces de dimensão $r - 1$ herdam as orientações induzidas. O mesmo não se

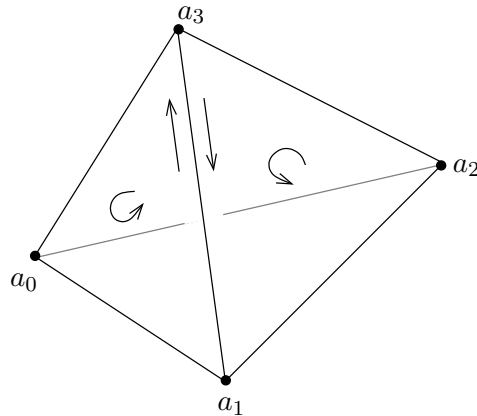
dá com as faces de dimensão $r - 2$, conforme esclarece o teorema seguinte.

$$\mathbf{s} = [a_0, a_1, a_2, a_3], \big(\mathbf{s}_{(0)}\big)_{(2)} = [a_3, a_1], \big(\mathbf{s}_{(2)}\big)_{(0)} = [a_1, a_3]$$

**Figura 15.**

**Teorema 3.** *Num simplexo $r$-dimensional orientado $\boldsymbol{s}$ toda face $(r-2)$-dimensional $t$ pertence a duas faces de dimensão $r-1$, as quais, com as orientações nelas induzidas por $\boldsymbol{s}$, induzem orientações opostas em $t$.*

**Demonstração:** Sejam $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ e $t = \langle a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_r\rangle$, com $i < j$. As faces $(r-1)$-dimensionais de $\boldsymbol{s}$ (com as orientações induzidas) que contêm $t$ são

$$\boldsymbol{s}_{(i)} = (-1)^i[a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_j, \ldots, a_r] \quad \text{e}$$
$$\boldsymbol{s}_{(j)} = (-1)^j[a_0, \ldots, a_i, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_r].$$

As orientações que $\boldsymbol{s}_{(i)}$ e $\boldsymbol{s}_{(j)}$ , induzem em $t$ são, respectivamente,

$$(\boldsymbol{s}_{(i)})_{(j)} = (-1)^{i+j-1}[a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_r] \quad \text{e}$$
$$(\boldsymbol{s}_{(j)})_{(i)} = (-1)^{i+j}[a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_r],$$

as quais são opostas uma da outra.

O Teorema 3 é o ponto de partida para a definição do complexo de cadeias que associaremos a cada poliedro. Vejamos como.

Dados o poliedro $K$ e o anel comutativo com unidade $A$ (anel dos coeficientes), consideramos, para cada inteiro $r \geq 0$, o $A$-módulo $C_r(K, A)$, que na intimidade chamaremos de "grupo" e denotaremos por $C_r(K)$, salvo quando houver necessidade de sermos mais explícitos. Os elementos de $C_r(K)$, chamados *cadeias $r$-dimensionais*, são as combinações lineares formais $x = \sum x_i \boldsymbol{s}_i$ de simplexos $r$-dimensionais orientados $\boldsymbol{s}_i \in K$, com coeficientes $x_i \in A$.

Cada $C_r(K)$, $r = 0, 1, \ldots$ é um $A$-módulo livre: escolhendo em cada $r$-simplexo $s \in K$ uma orientação, as $r$-cadeias $\boldsymbol{s}$ assim obtidas formam uma base de $C_r(K)$.

A fim de definir o operador-bordo

$$\partial\colon C_r(K) \to C_{r-1}(K)$$

basta dar o significado de $\partial \boldsymbol{s}$ para cada $r$-simplexo orientado $\boldsymbol{s}$.

Poremos então $\partial \boldsymbol{s} = \sum\limits_{i=0}^{r} \boldsymbol{s}_{(i)}$, onde $\boldsymbol{s}_{(i)}$ é a $i$-ésima face de $\boldsymbol{s}$ com a orientação induzida.

Se $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ então $\boldsymbol{s}_{(i)} = (-1)^i [a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r]$. Portanto

$$\partial[a_0, a_1, \ldots, a_r] = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i [a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r].$$

Segue-se do Teorema 3 que $\partial \circ \partial = 0$ e, se $\dim K = n$, a seqüência

$$\mathcal{C}(K)\colon C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \to 0$$

é um complexo de cadeias. Por completeza, pomos $\partial x = 0$ para toda cadeia de dimensão 0, $x = \sum x_i a_i$, combinação linear dos vértices $a_i$ do poliedro $K$. Mais geralmente, se $x = \sum x_i \boldsymbol{s}_i$ é uma combinação linear de $r$-simplexos orientados $\boldsymbol{s}_i \in K$ com coeficientes $x_i \in A$, por definição tem-se $\partial x = \sum x_i \partial \boldsymbol{s}_i$.

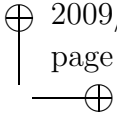
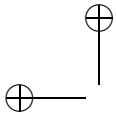
A fim de tornar mais expedito o manuseio algébrico das cadeias (principalmente ao tratarmos de aplicações simpliciais), vamos ampliar a noção de simplexo orientado, admitindo que, ao escrevermos $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$, os pontos $a_0, a_1, \ldots, a_r$ sejam ainda vértices de um mesmo simplexo em $K$, porém agora sendo permitidas repetições, ou seja, podendo-se ter $a_i = a_j$ com $i \neq j$. Mas continuaremos impondo que, ao se submeterem os vértices de $\boldsymbol{s}$ a uma permutação ímpar, passa-se de $\boldsymbol{s}$ a $-\boldsymbol{s}$. Mais explicitamente: se $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ e $\sigma$ é uma permutação do conjunto $\{0, 1, \ldots, r\}$ então $[a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(r)}] = \pm[a_0, a_1, \ldots, a_r]$, conforme a permutação $\sigma$ seja par ou ímpar.

Em consonância com o fato de que um simplexo orientado muda de sinal quando seus vértices são submetidos a uma permutação ímpar, imporemos que seja $[a_0, a_1, \ldots, a_r] = 0$ caso se tenha $a_i = a_j$ para algum par $(i, j)$ com $i \neq j$. Noutras palavras, todo simplexo orientado *degenerado* (com um ou mais vértices repetidos) é igual a zero.

**Observação.** Seja $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ um simplexo orientado degenerado, digamos com $a_i = a_j$, $i \neq j$. Trocando as posições dos vértices $a_i$ e $a_j$, sem mover os demais, deveríamos ter

$$[a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_r] = -[a_0, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_r].$$

Como $a_i = a_j$, isto nos diz que $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{s}$ para todo simplexo degenerado $\boldsymbol{s}$. Se o anel $A$ dos coeficientes é tal que $1 + 1 \neq 0$, concluímos que todo simplexo degenerado é nulo, sem haver necessidade de adotar este fato por definição. Ocorre, entretanto, que há situações relevantes em que é conveniente considerar homologia com coeficiente em $\mathbb{Z}_2$ ou noutros anéis onde $1 + 1 = 0$. Por isso foi necessário impor que $\boldsymbol{s} = 0$ quando $\boldsymbol{s}$ é degenerado.

A fim de mostrar que a definição de $\partial$ continua válida mesmo diante do fato de que $\boldsymbol{s} = 0$ quando $\boldsymbol{s}$ é degenerado, é preciso provar que, neste caso, tem-se necessariamente $\partial \boldsymbol{s} = 0$.

Com efeito, seja $\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$, onde $a_i = a_j (= b)$ com $0 \leq i < j \leq r$. Por definição, temos

$$\partial \boldsymbol{s} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k [a_0, \ldots, \widehat{a_k}, \ldots, a_r].$$

No somatório acima, exceto as parcelas em que $k = i$ ou $k = j$, as demais correspondem a simplexos degenerados, logo são nulas. A soma reduz-se portanto a

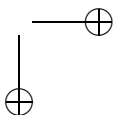
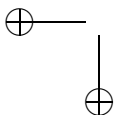
$$\begin{aligned} \partial \boldsymbol{s} = (-1)^i &[a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_r] \\ &+ (-1)^j [a_0, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_r] = 0 \end{aligned}$$

pois o segundo simplexo se transforma no primeiro fazendo $b$ dar $j - i - 1$ saltos, após cada um dos quais há uma mudança de sinal. No fim, a segunda parcela aparece com o coeficiente $(-1)^{j+j-i-1} = (-1)^{i+1}$, logo anula a primeira.

Temos assim associado a cada poliedro $K$ e cada anel comutativo com unidade $A$, o complexo de cadeias

$$\mathcal{C}(K; A) = \mathcal{C}(K) \colon C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K).$$

Isto nos põe em condições de utilizar o formalismo desenvolvido no Capítulo 1. Por exemplo, se $L \subset K$ é um subpoliedro, temos a homologia relativa $H_r(K; L)$ com a respectiva seqüência exata e, se $K = K_1 \cup K_2$ onde $K_1$ e $K_2$ são subpoliedros, vale a seqüência de Mayer-Vietoris correspondente.

Uma aplicação simplicial $f \colon K \to L$, do poliedro $K$ no poliedro $L$, induz um morfismo do complexo de cadeias $\mathcal{C}(K)$ em $\mathcal{C}(L)$, o qual indicamos com o mesmo símbolo $f$. Para cada $r \geq 0$, o homomorfismo $f \colon C_r(K) \to C_r(L)$ é definido, de modo natural pondo, para cada $r$-simplexo orientado $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_r]$, $f(\boldsymbol{s}) = [f(a_0), \ldots, f(a_r)]$. Isto nos dá imediatamente $f(\boldsymbol{s}) = 0$ se $f(a_i) =$

$f(a_j)$ com $i \neq j$. Além dissso, vê-se facilmente que $f(\partial\, \boldsymbol{s}) = \partial\, f(\boldsymbol{s})$, logo $f\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ é, de fato, um morfismo, o qual determina, em cada dimensão $r$, o homomorfismo $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$, dado por $f_*([z]) = [f(z)]$. Diz-se que $f_*$ é o *homomorfismo induzido* pela aplicação simplicial $f\colon K \to L$.

Se $f\colon K \to L$ e $g\colon L \to M$ são aplicações simpliciais é claro que $g \circ f\colon K \to M$ também é simplicial e tem-se $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Além disso, como a aplicação identidade de $K \to K$ induz o homomorfismo identidade $H_r(K) \to H_r(K)$, segue-se que um isomorfismo de poliedros $f\colon K \to L$ induz isomorfismos $f_*\colon H_r(M) \to H_r(L)$ em todas as dimensões.

Há ainda o complexo $\mathcal{C}^*(K)$ formado pelos $A$-módulos $C^r(K) = \operatorname{Hom}(C_r(K); A)$ das cocadeias, cujos grupos de cohomologia $H^r(K) = H^r(K; A)$ desempenham papel relevante no desenvolvimento da teoria.

# 3 Primeiros exemplos de homologia simplicial

**Exemplo 6.** A *homologia de dimensão zero.* Como o bordo de um vértice é zero, toda cadeia 0-dimensional $x = \sum x_i a_i$ no poliedro $K$ é um ciclo, ou seja $C_0(K) = Z_0(K)$. A fim de determinar o conjunto $B_0(K)$ dos bordos de dimensão 0, suporemos inicialmente que o poliedro $K$ seja conexo. Como se vê facilmente, isto equivale a dizer que existe um caminho de arestas em $K$ ligando dois vértices quaisquer. Explicitamente: dados dois vértices arbitrários $a, b \in K$, existem vértices $a_0 = a, a_1, \ldots, a_m = b$ em $K$ tais que $[a_{i-1}, a_i]$ é uma aresta (simplexo unidimensional) em $K$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

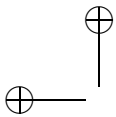
Dado o poliedro conexo $K$, definimos o homomorfismo $In\colon C_0(K) \to A$ pondo, para cada 0-cadeia $x = \sum x_i a_i$ em $K$, $In(x) = \sum x_i$. O elemento $In(x) \in A$ chama-se o *índice de Kronecker* de 0-cadeia $x$. Pois bem, a cadeia $x \in C_0(K)$ é um bordo se, e somente se, seu

índice de Kronecker é igual a zero.

De fato, se existir $y \in C_1(K)$ tal que $\partial y = x$ então, escrevendo $y = \sum y_i[b_i, c_i]$ temos $\sum x_i a_i = x = \partial y = \sum y_i c_i - \sum y_i b_i$ portanto $In(x) = \sum y_i - \sum y_i = 0$. Reciprocamente, se a 0-cadeia $x = \sum x_i a_i$ é tal que $In(x) = \sum x_i = 0$ então, fixando um vértice arbitrário $a \in K$, usamos a conexidade de $K$ a fim de obter, para cada $i$, um caminho de arestas em $K$ ligando $a$ e $a_i$ , ou seja, uma 1-cadeia $c_i$ tal que $\partial c_i = a_i - a$. Então, considerando a 1-cadeia $y = \sum x_i c_i$ vemos que $\partial y = \sum x_i a_i - \big(\sum x_i\big)a = \sum x_i a_i = x$, portanto $x$ é um bordo.

O caso em que o poliedro $K$ não é conexo resulta de um fato mais geral: se $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ é a expressão de $K$ como reunião de suas componentes conexas (cada uma das quais é um poliedro, pois todo simplexo é conexo) então, para todo $r \geq 0$ tem-se $H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \cdots \oplus H_r(K_m)$, como se vê sem dificuldade. Em particular, tomando $r = 0$ obtemos $H_0(K) = A^m$, onde $m$ é o número de componentes de $K$. $\triangleleft$

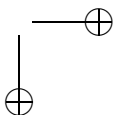
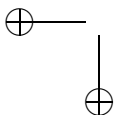
**Exemplo 7.** A *homologia de um cone.* Quando $t = \langle a, a_0, \ldots, a_r\rangle$ e $s = \langle a_0, \ldots, a_r\rangle$ é a face de $t$ oposta ao vértice $a$, escrevemos $t = a * s$. Se $a$ é um vértice do poliedro $K$, diz-se que $K$ é um *cone de vértice* $a$ quando, para todo simplexo $s \in K$ que não tem $a$ como vértice, $t = a * s$ é um simplexo de $K$. A reunião $L$ dos simplexos de $K$ dos quais $a$ não é vértice é um subpoliedro. Tem-se $K = \bigcup\limits_{s\in L} a * s$, portanto é natural escrever $K = a * L$ e dizer que $L$ é a *base* do cone $K$ com vértice $a$. Um caso particular ocorre quando $L$ é um poliedro contido numa variedade afim $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $\leq n - 1$, $a \notin V$ e $K = \bigcup\limits_{s\in L} a * s$.

Seja $K$ um cone de vértice $a$. Como todo ponto de $K$ pode ser ligado a $a$ por um segmento de reta, $K$ é conexo, logo $H_0(K) = A$. Para calcular $H_r(K)$ com $r \geq 1$, consideremos a aplicação $A$-linear $a*\colon C_r(K) \to C_{r+1}(K)$ definida pondo-se, para cada

$\boldsymbol{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_r] \in C_r(K)$, $a * \boldsymbol{s} = [a, a_0, \ldots, a_r]$, logo $a * x = \sum x_i \cdot a * s_i$ quando $x = \sum x_i \boldsymbol{s_i}$. Notemos que $a * \boldsymbol{s} = 0$ quando $a$ é um vértice do simplexo $s$.

Verifica-se facilmente que, quando $s \in K$ tem dimensão $\geq 1$, $\partial(a * \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s} - a * \partial \boldsymbol{s}$ para todo $s \in K$ e daí $\partial(a * x) = x - a * \partial x$ para toda cadeia $x \in C_r(K)$. Então, se $z \in Z_r(K)$ é um ciclo de dimensão $\geq 1$, tem-se $z = \partial(a * z)$. Portanto, quando $r \geq 1$, todo $r$-ciclo é um bordo, ou seja, $H_r(K) = 0$.

Em particular, se $s$ é um simplexo, podemos considerá-lo como um cone em relação a qualquer dos seus vértices, portanto $H_r(s) = 0$ se $r \geq 1$ e $H_0(s) = A$. ◁

**Exemplo 8.** *A homologia da esfera* $S^n$. Seja $K$ o poliedro formado pelo simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \rangle$ e suas faces. A esfera $S^n$ é o esqueleto $n$-dimensional de $K$. Como $K$ é um cone (com vértice em qualquer dos $a_i$) temos $H_r(K) = 0$ para todo $r > 0$ e $H_0(K) = A$. Se $0 < r < n$ tem-se também $H_r(S^n) = 0$ pois, para esses valores de $r$, todo ciclo $z \in Z_r(S^n) = Z_r(K)$ é da forma $z = \partial x$, com $x \in C_{r+1}(K) = C_{r+1}(S^n)$. Resta determinar $H_n(S^n)$. A cadeia $z = \partial \boldsymbol{s}$, soma de todas as $n$-faces de $S^n$ com as orientações induzidas por $\boldsymbol{s}$, é certamente um $n$-ciclo em $S^n$, o qual não é bordo pois não há simplexos de dimensão $n+1$ em $S^n$. Portanto $[z] \neq 0$ e conseqüentemente $H_n(S^n) \neq 0$. Na verdade, $[z]$ é um gerador de $H_n(S^n)$ pois se tomarmos arbitrariamente um ciclo $w \in Z_n(S^n) = Z_n(K)$, como $H_n(K) = 0$, existe $x \in C_{n+1}(K)$ tal que $\partial x = w$. Como $K$ tem apenas o simplexo $s$ em dimensão $n+1$, temos $x = \alpha \cdot \boldsymbol{s}$, $\alpha \in A$, logo $w = \partial x = \alpha \cdot \partial \boldsymbol{s} = \alpha \cdot z$. Portanto todo $n$-ciclo em $S^n$ é múltiplo de $z$ e daí $H_n(S^n) = A$. ◁

**Exemplo 9.** *A homologia do anel circular.* O anel circular, subconjunto compacto do plano compreendido entre duas circunferências concêntricas, pode ser triangulado na forma da figura abaixo e assim é identificado a um poliedro bidimensional $K$ com 6 vértices,

12 arestas e 6 faces.

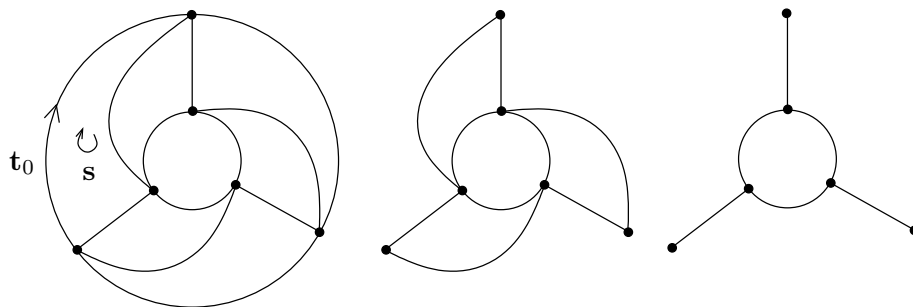



**Figura 16.**

Como $K$ é conexo, temos $H_0(K) = A$. Para determinar $H_1(K)$, consideremos um ciclo $z = \sum x_t \boldsymbol{t} \in Z_1(K)$. A soma estende-se a todas as arestas $t$ de $K$ e, para obtermos uma base de $C_1(K)$, fixamos arbitrariamente uma orientação em cada uma dessas arestas. Se alguma $t_0$ está situada na circunferência externa de $K$, ela é lado de um (único) triângulo $s$. Então, ajustando a orientação de $s$, vemos que $z' = z - \partial(x_{t_0} \cdot \boldsymbol{s})$ é um ciclo homólogo a $z$, em cuja expressão $z' = \sum m_t \boldsymbol{t}$ a aresta $\boldsymbol{t_0}$ aparece um coeficiente 0. Repetindo este argumento (mais duas vezes, no máximo), concluímos que todo ciclo $z \in Z_1(K)$ é homólogo a um $w \in Z_1(K)$ que é combinação linear de arestas, nenhuma das quais está sobre a circunferência externa de $K$. Assim, $w$ é um ciclo do segundo poliedro da Figura 16. O mesmo tipo de raciocínio nos diz que $w$, por sua vez, é homólogo a um ciclo do terceiro poliedro da Figura 16, o qual é, na realidade, um ciclo na circunferência interna (pois, do contrário, seu bordo conteria pelo menos um dos vértices salientes). Se chamarmos de $S^1$ a circunferência interna de $K$, vemos assim que $H_1(K) = H_1(S^1) = A$. Resta mostrar que $H_2(K) = 0$. A razão para isto é simplesmente que $Z_2(K) = 0$, ou seja, não há 2-ciclos não-nulos no poliedro $K$. De fato, se atribuirmos a cada 2-simplexo de $K$ a orientação indicada

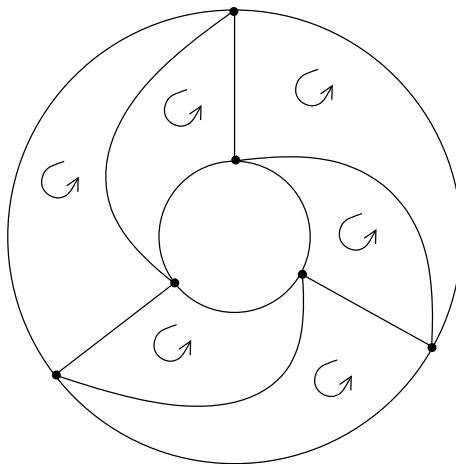



**Figura 17.**

na Figura 17 e tivermos $z = \sum x_s \cdot \boldsymbol{s} \in Z_2(K)$ então, como cada aresta de $K$ situada numa das duas circunferências da fronteira é face de apenas um triângulo, de $\partial z = 0$ concluímos que $x_s = 0$ para todo triângulo $s$ que tenha um lado na fronteira, ou seja, para todo triângulo $s$. Portanto $z = 0$. Assim os grupos de homologia do anel circular $K$, com coeficientes em $A$, são $H_0(K) = A$, $H_1(K) = A$ e $H_2(A) = 0$. ◁

Sob o ponto de vista topológico, o anel circular é o mesmo que o cilindro $S^1 \times [0,1]$. Pode parecer coincidência que sua homologia seja a mesma de $S^1$ mas veremos na seção 5 que isto resulta do fato de $S^1$ e $S^1 \times [0,1]$ terem o mesmo tipo de homotopia.

Um modo alternativo de tratar o Exemplo 9 consiste em usar a seqüência de Mayer-Vietoris. Podemos considerar a Figura 17 como uma triangulação do disco maior $D = K \cup L$, onde $K$ é, como antes, o anel circular e $L$ é o disco interior, triangulado como um 2-simplexo. Levando em conta que $L$ e $K \cup L$ são triangulações

de simplexos bidimensionais, enquanto $K \cap L$ é uma triangulação de $S^1$, examinemos dois trechos da seqüência de Mayer-Victoris associada à decomposição $D = K \cup L$. Eles são

$$\begin{aligned} & H_2(K \cap L) \to H_2(K) \oplus H_2(L) \to H_2(K \cup L) \\ \text{e} \quad & H_2(K \cup L) \to H_1(K \cap L) \to H_1(K) \oplus H_1(L) \to H_1(K \cup L). \end{aligned}$$

Pelo que sabemos sobre as homologias de $K \cup L$, $L$ e $K \cap L$, estas seqüências exatas se reduzem a

$$0 \to H_2(K) \to 0 \quad \text{e} \quad 0 \to A \to H_1(K) \to 0,$$

portanto $H_2(K) = 0$ e $H_1(K) = A$.

**Exemplo 10.** Um poliedro $K$ diz-se *acíclico* quando é conexo e, além disso, $H_r(K) = 0$ para todo $r > 0$. Dito de outro modo, um poliedro acíclico é aquele que tem a mesma homologia de um ponto. Por exemplo, todo cone é um poliedro acíclico.

Segue-se imediatamente da seqüência de Mayer-Victoris que se o poliedro $K = L \cup M$ é reunião de dois subpoliedros cuja interseção $L \cap M$ é acíclica então, para todo $r > 0$, tem-se $H_r(K) = H_r(L) \oplus H_r(M)$, sendo claro que $H_0(K) = A$. (No caso de $H_1(K)$, observar que, como $L \cap M$ é conexo, o homomorfismo $H_1(K) \to H_0(L \cap M)$ na seqüência de Mayer-Vietoris é zero.) Em particular, se $K$ é a figura 8, reunião de duas circunferências com um ponto em comum, então $H_1(K) = A \oplus A$.

**Exemplo 11.** *Homologia do toro bidimensional* $T^2$. Consideremos a triangulação de $T^2$ vista no Exemplo 4. Atribuindo a cada 2-simplexo $s$ a orientação anti-horária, a cadeia $\Gamma = \sum \boldsymbol{s}$ é um ciclo, pois cada aresta do toro herda orientações opostas dos dois triângulos que nela incidem. Além disso, se $w = \sum_s w_s \boldsymbol{s}$ é qualquer 2-ciclo, sempre que os triângulos $s'$ e $s''$ tiverem em comum uma aresta $t$, deve ser $w_{s'} = w_{s''}$ pois $w_{s'} - w_{s''}$ é o coeficiente de $\boldsymbol{t}$ na

expressão de $0 = \partial w = \sum w_s \cdot \partial \boldsymbol{s} = \sum \alpha_t \cdot \boldsymbol{t}$. Como dois triângulos quaisquer em $T^2$ podem ser ligados por uma cadeia de triângulos adjacentes, concluímos que se $w = \sum w_s \boldsymbol{s}$ é um 2-ciclo então todos os coeficientes $w_s$ são iguais, digamos a $\alpha \in A$, e então $w = \alpha \cdot \Gamma$. Portanto $H_2(T^2)$ é o $A$-módulo livre cíclico, gerado por $\Gamma$ ou, mais simplesmente, $H_2(T^2) = A$. ◁

Mostraremos, em seguida, que $H_1(T^2) = A \oplus A$ é o $A$-módulo livre gerado pelas classes de homologia dos ciclos representados pelos lados $a$, $b$ do retângulo da Figura 18, os quais correspondem a um paralelo e um meridiano do toro. Para isto, começamos com um 1-ciclo arbitrário $z$ e provamos que ele é homólogo a outro, formado por arestas contidas no contorno do retângulo.

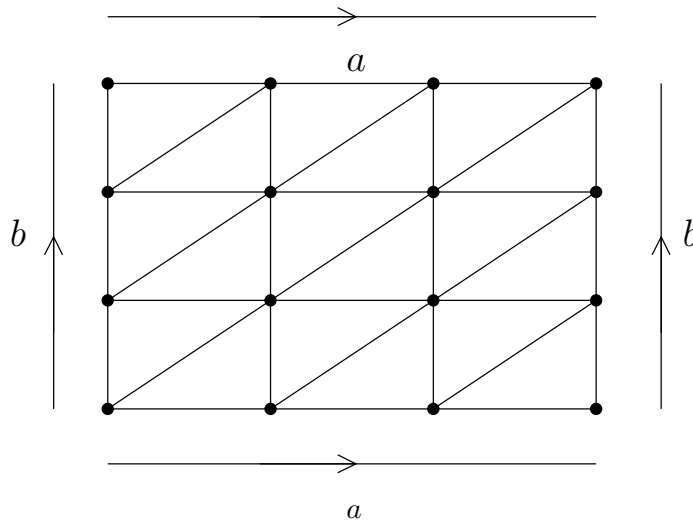



**Figura 18.**

Partindo de $z$ e somando sucessivamente bordos de triângulos escolhidos de modo adequado, obteremos uma seqüência de ciclos homólogos a $z$, cada um com menos arestas internas do que o anterior, até chegar a um ciclo $w$, homólogo a $z$, formado apenas por arestas contidas no contorno do retângulo. Primeiro eliminamos, uma a uma, cada aresta interna, horizontal ou inclinada, que esteja

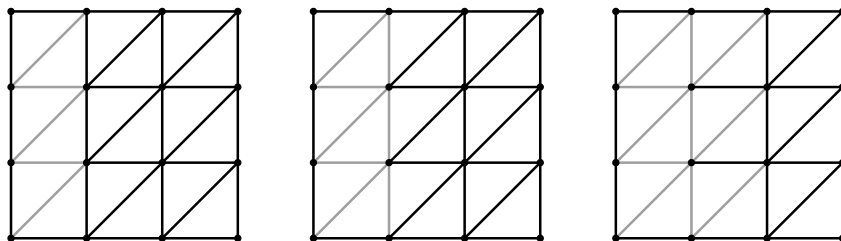
na primeira coluna à esquerda, somando ao ciclo $z$ sucessivamente, de baixo para cima, o bordo do triângulo situado imediatamente abaixo dela (devidamente multiplicado por $-\alpha$ se a aresta aparece no ciclo multiplicada por $\alpha$, $\alpha \in A$). Após estas operações, obtemos um ciclo $z'$, homólogo ao $z$ inicial, formado por arestas do contorno do retângulo ou das duas colunas da direita. Em seguida, eliminamos as arestas verticais que estão à esquerda da coluna do meio somando a cada uma delas um múltiplo conveniente do bordo do triângulo do qual ela é um cateto.

  

**Figura 19.**

Chegamos assim a um ciclo $z'$, homólogo ao inicial, cujas arestas estão no contorno do retângulo ou entre as mais acentuadas no segundo quadro da Figura 19. Somando mais três bordos de triângulos, obtemos um ciclo cujas arestas estão no contorno ou entre aquelas destacadas no último quadro da Figura 19. Alí, os dois segmentos horizontais sobressalentes são ilusórios pois um ciclo de dimensão 1 não pode possuir vértices livres (isto é, que pertencem a uma única aresta). Então o ciclo original $z$ é homólogo a um cujas arestas estão sobre o contorno ou sobre a última coluna vertical. Podemos assim usar o argumento que nos levou do segundo para o último quadro da Figura 19, e provamos finalmente que todo 1-ciclo em $T^2$ é homólogo a outro que está contido no contorno do retângulo, portanto é uma combinação linear $x \cdot a + y \cdot b$ do paralelo $a$ com o meridiano $b$ do toro. Assim, as classes de homologia de $a$ e $b$ geram $H_1(T^2)$. Na verdade, essas classes são linearmente independentes, logo $H_1(T^2)$ é um $A$-módulo livre com dois geradores.

Com efeito, se tivermos $\alpha[a] + \beta[b] = 0$, isto é, se houver uma 2-cadeia $w$ tal que $\partial w = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, então, escrevendo $w = \sum w_s \cdot [\boldsymbol{s}]$, onde $s$ percorre todos os 2-simplexos de $T^2$, vemos que, para toda aresta $t$ que não esteja em $a$ nem $b$, se $s'$ e $s''$ são os 2-simplexos que incidem sobre $t$, deve ser $w_{s'} = w_{s''}$. Daí resulta que $w_{s'} = w_{s''}$ e conseqüentemente $w$ é múltiplo de $\Gamma$. Segue-se imediatamente que $\alpha = \beta = 0$. Isto conclui a determinação da homologia de $T^2$. ◁

**Exemplo 12.** *Homologia do plano projetivo.* Consideremos a triangulação do plano projetivo $P^2$ apresentada no Exemplo 5. Atribuindo a cada 2-simplexo a orientação anti-horária, obtemos uma 2-cadeia $\Gamma = \sum_{s \in P^2} \boldsymbol{s}$, cujo bordo é $\partial\Gamma = 2a$, onde $a$ é a *reta projetiva* (ciclo de dimensão 1), soma de quatro arestas consecutivas do contorno da Figura 13, com as orientações induzidas pelas parcelas de $\Gamma$. Para simplificar a discussão, tomemos $\mathbb{Z}$ como o anel dos coeficientes. (Depois consideraremos o caso geral.) Não há 2-ciclos diferentes de zero. De fato, se a 2-cadeia $z = \sum z_s \boldsymbol{s}$ é tal que $\partial z = 0$ então, como já vimos antes, para quaisquer triângulos $s'$, $s''$, tem-se $z_{s'} = z_{s''} = n \in \mathbb{Z}$, logo $z = n \cdot \Gamma$ e daí $0 = \partial z = n \cdot \partial\Gamma = 2n \cdot a$, portanto $n = 0$ e $z = 0$. Assim, tomando coeficientes inteiros, temos $H_2(P^2) = 0$. Quanto a $H_1(P^2)$, um argumento análogo ao do Exemplo 11, partindo do centro do círculo que representa $P^2$ e espiralando na direção do contorno, dado um ciclo $z \in Z_1(P^2)$, somamos sucessivamente bordos de triângulos, de modo a obter $z'$, homólogo a $z$, formado por arestas do contorno. Então $z'$ é homólogo a $a$ ou a zero. Por sua vez, a reta projetiva $a$ não é o bordo de uma cadeia de dimensão 2, ou seja, tem-se $[a] \neq 0$. De fato, uma cadeia $y \in C_2(P^2)$, para ter seu bordo, contido no contorno da Figura 13, deve ter a forma $z = n{\cdot}\Gamma$ e então $\partial z = 2n{\cdot}a \neq a$. Conseqüentemente, $H_1(P^2) = \mathbb{Z}_2$.

Se tomarmos coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ então a 2-cadeia $\Gamma$ é um ciclo e, neste caso, teremos $H_2(P^2) = \mathbb{Z}_2$, $H_1(P^2) = \mathbb{Z}_2$ e $H_0(P^2) = \mathbb{Z}_2$.

Com coeficientes num anel arbitrário $A$, podemos dizer que $H_2(P^2) = \mathbb{Z}_2(P^2) = \{x \in A; 2x = 0\}$, $H_1(P^2)$ é o $A$-módulo quociente $A/2A$. Por exemplo, $H_1(P^2) = \mathbb{Z}_2$ quando $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{Z}_2$ e $H_2(P^2) = 0$ se $A$ é um corpo de característica $\neq 2$. $\triangleleft$

# 4 Subdivisão baricêntrica

Estritamente falando, nos exemplos apresentados até agora, não obtivemos grupos de homologia dos espaços considerados, mas sim das triangulações neles tomadas. É natural indagar se, triangulando o mesmo espaço $X$ por meio de dois poliedros distintos $K_1$ e $K_2$ (necessariamente homeomorfos mas) não isomorfos, devemos ter $H_r(K_1) \approx H_r(K_2)$ para todo $r = 0, 1, 2, \ldots$ . A resposta é afirmativa. Na realidade, um resultado mais geral vale: se os espaços trianguláveis $X$ e $Y$ têm o mesmo tipo de homotopia, seus grupos de homologia são isomorfos. (Analogamente ao que vimos no Capítulo 2 com a cohomologia de deRham.) Preparando o terreno para provar esses fatos, começamos estudando a subdivisão baricêntrica de um poliedro.

Uma *subdivisão* de um poliedro $K$ é um poliedro $K_1$ que, como conjunto de pontos, é igual a $K$ porém com mais e menores simplexos. Mais precisamente, todo simplexo de $K$ é a reunião dos simplexos de $K_1$ nele contidos. O exemplo mais freqüente é a subdivisão baricêntrica.

O *baricentro* do simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle$ é o ponto $b_s = (a_0 + a_1 + \cdots + a_r)/(r+1)$, que tem todas as coordenadas baricêntricas iguais a $1/(r+1)$. Este ponto está em *posição geral* relativamente ao bordo $\overset{\bullet}{s}$ do simplexo, ou seja, se $p$ e $q$ são pontos distintos do bordo $\overset{\bullet}{s}$, os segmentos de reta $[b_s, p]$ e $[b_s, q]$ têm apenas o ponto $b_s$ em comum. Portanto, se $t \subset \overset{\bullet}{s}$ é um simplexo $m$-dimensional então o cone $b_s * t$ é um simplexo de dimensão $m+1$ contido em $s$.

A *subdivisão baricêntrica* $K'$ do poliedro $K$ é definida indutivamente. A subdivisão de cada vértice é, obviamente, o próprio vértice. Supondo definida a subdivisão baricêntrica $(K^r)'$ do esqueleto $r$-dimensional $K^r$ tomamos, em cada $(r+1)$-simplexo $s$, o baricentro $b_s$ e definimos a subdivisão baricêntrica de $s$ como o poliedro $s' = b_s * \left(\overset{\bullet}{s}\right)'$, onde $\overset{\bullet}{s}$ é o bordo de $s$ (contido em $K^r$, logo $\left(\overset{\bullet}{s}\right)'$ está definido).

Então pomos $(K^{r+1})' = \bigcup_s s'$, onde $s$ varia entre todos os $(r+1)$-simplexos de $K$.

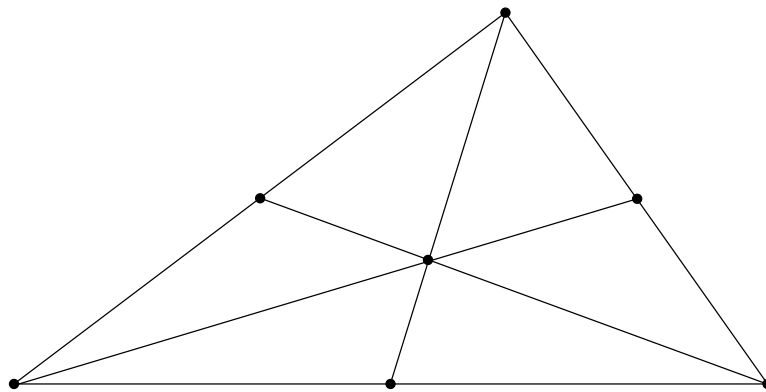



**Figura 20**. Subdivisão baricêntrica de um 2-simplexo.

Segue-se desta definição que os vértices da subdivisão baricêntrica $K'$ são os baricentros $b_s$ dos simplexos $s \in K$ e os simplexos de $K'$ têm a forma $\langle b_{s_0}, b_{s_1}, \ldots, b_{s_r} \rangle$, onde cada $s_i$ é um simplexo de $K$ e $s_0 \subset s_1 \subset \cdots \subset s_r$, ou seja, cada $s_i$ é uma face de $s_{i+1}$.

Se, em vez do baricentro, tivéssemos escolhido um outro ponto $p_s$ no interior de cada simplexo $s$, a definição indutiva dada acima ainda produziria uma subdivisão do poliedro $K$. A vantagem da subdivisão baricêntrica está na regularidade com que ela reduz o tamanho dos simplexos, conforme exprime o teorema seguinte. Antes de prová-lo, observemos que se $[a, b]$ é um segmento de reta

em $\mathbb{R}^n$ e $p$ é um ponto arbitrário desse espaço então o maior valor da distância $|p-x|$ de $p$ a um ponto qualquer $x \in [a,b]$ é atingido quando $x=a$ ou $x=b$. Como os vértices de um simplexo $s$ são os únicos de $s$ que não são interiores a segmento de reta algum contido em $s$ (pontos extremos), segue-se que a maior distância de um ponto qualquer $p \in \mathbb{R}^n$ a um ponto de um simplexo $s \subset \mathbb{R}^n$ tem o valor $|p-a_i|$, onde $a_i$ é um vértice de $s$. Em particular, o diâmetro do simplexo $s = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r\rangle$ é $\operatorname{diam} s = \text{ máx}\{|a_i - a_j|; i,j = 0,1,\ldots,r\}$.

**Teorema 4.** *Se o simplexo $r$-dimensional $s$ tem diâmetro $d$ então sua subdivisão baricêntrica $s'$ é um poliedro cujos simplexos têm todos diâmetro $\leq \frac{r}{r+1}\cdot d$.*

**Demonstração:** Seja $t$ um simplexo de $s'$. Então $\operatorname{diam} t = |p-q|$, onde $p = \frac{1}{m+1}(a_0 + \cdots + a_m)$ e $q = \frac{1}{n+1}(a_0+\cdots+a_n)$, com $m \leq n$, são vértices de $t$: $p$ é o baricentro da face $\langle a_0,\ldots,a_m\rangle$ de $s$, a qual, por sua vez, é face de $\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$. Como $p$ é interior ao simplexo $\langle a_0,\ldots,a_m\rangle$, temos $|p-q| \leq \max\{|a_i - q|; i = 0,\ldots,m\}$. Levando em conta que cada $a_i$ $(i=0,\ldots,m)$ é um dos $a_j$ $(j=0,\ldots,n)$, vemos que, para todo $i=0,\ldots,m$, vale

$$|a_i - q| = |a_i - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+1}\,a_j| = \frac{1}{n+1}\,|\sum_{j\neq i}(a_i - a_j)|$$
$$\leq \frac{n}{n+1}\,\max|a_i - a_j| = \frac{n}{n+1}\operatorname{diam} s \leq \frac{r}{r+1}\cdot d.$$

Logo $\operatorname{diam} t \leq \frac{r}{r+1}\cdot d$. □

Iterando um número suficientemente grande de vezes a subdivisão baricêntrica de um poliedro, pode-se fazer com que todos os simplexos tenham diâmetros arbitrariamente pequenos. Com efeito, se definirmos indutivamente a $n$-ésima subdivisão baricêntrica $K^{(n)}$ do poliedro $K$ ponto $K^{(1)} = K'$ e $K^{(n)} = [K^{(n-1)}]'$, vale o

**Corolário 1.** *Dados o poliedro $K$ e o número real $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos os simplexos de $K^{(n)}$ têm diâmetro $< \varepsilon$.*

De fato, se $d$ é o maior diâmetro e $r$ é a maior dimensão de um simplexo de $K$ então o maior diâmetro de um simplexo de $K^{(n)}$ é $\leq [r/(r+1)]^n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{r}{r+1}\right)^n = 0$.

Vamos, em seguida, mostrar que o poliedro $K$ e sua subdivisão baricêntrica $K'$ têm os mesmos grupos de homologia. Para isso, faremos uso da noção de transporte acíclico, a qual possui outras aplicações. Um complexo de cadeias chama-se *acíclico* quando seus grupos de homologia em dimensões $> 0$ são todos nulos e o grupo de dimensão zero reduz-se ao anel de coeficientes.

Um *transporte acíclico* $\Gamma$ do poliedro $K$ para o poliedro $L$ é uma correspondência que associa a cada simplexo $s$ de $K$ um subcomplexo $\Gamma(s) \subset \mathcal{C}(L)$, com as seguintes propriedades:

1) Se $t$ é uma face de $s$ então $\Gamma(t) \subset \Gamma(s)$;

2) Para todo $s$ em $K$, o complexo $\Gamma(s)$ é acíclico.

Diz-se que um morfismo $f\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ é *transportado* por $\Gamma$ quando, para todo simplexo $s$ em $K$ tem-se $f(\boldsymbol{s}) \in \Gamma(s)$. Uma aplicação simplicial diz-se transportada por $\Gamma$ quando o morfismo por ela induzido nas cadeias o é.

Duas aplicações simpliciais $f, g\colon K \to L$ chamam-se *contíguas* quando, para todo simplexo $s$ em $K$, $f(s)$ e $g(s)$ são faces de um mesmo simplexo em $L$. A relação "$f$ e $g$ são contíguas" é reflexiva e simétrica mas não é transitiva, logo não é uma equivalência.

Dadas as aplicações simpliciais contíguas $f, g\colon K \to L$ ponhamos, para cada simplexo $s$ em $K$, $\Gamma(s) = \mathcal{C}(t)$, onde $t$ é o simplexo de menor dimensão em $L$ que tem ao mesmo tempo $f(s)$ e $g(s)$ como faces. A correspondência $s \mapsto \Gamma(s)$ é um transporte acíclico e $f$, $g$ são transportadas por $\Gamma$.

O teorema seguinte, referente a poliedros $K$ e $L$, justifica nosso interesse em transportes acíclicos.

**Teorema 5.** *Seja* $\Gamma$ *um transporte acíclico de* $K$ *para* $L$*. Se os morfismos* $f, g\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ *são ambos transportados por* $\Gamma$ *e* $\mathrm{In}(f(x)) = \mathrm{In}(g(x))$ *para toda 0-cadeia* $x \in C_0(K)$ *então* $f_* = g_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$.

**Demonstração:** Definiremos, por indução em $r$, uma homotopia algébrica entre $f$ e $g$, ou seja, uma seqüência de homomorfismos $D = D_r\colon C_r(K) \to C_{r+1}(L)$ tais que $D\partial x + \partial D x = f(x) - g(x)$ para toda cadeia $x \in C_r(K)$. Basta definir $Ds$ quando $s$ é um $r$-simplexo arbitrário em $K$. Começamos com $r = 0$. Dado um vértice $a \in K$, temos $f(a) - g(a) \in \Gamma(a)$. Como $\Gamma(a)$ é acíclico e $\mathrm{In}(f(a) - g(a)) = \mathrm{In}\, f(a) - \mathrm{In}\, g(a) = 0$, vemos que $f(a) - g(a) = \partial x$ para alguma cadeia $x \in C_1(\Gamma(a))$. Escolhemos arbitrariamente uma tal $x$ e pomos $Da = x$. Então $D\partial a + \partial D a = \partial x = f(a) - g(a)$. Em seguida, suponhamos que $D$ tenha sido definido em $C_{r-1}(K)$, de tal modo que $D\partial + \partial D = f - g$ e $D(t) \in C_r(\Gamma(t))$ para todo $(r-1)$-simplexo $t$ em $K$. Seja $s$ um $r$-simplexo em $K$. Então

$$\partial\big[f(\boldsymbol{s}) - g(\boldsymbol{s}) - D\partial\boldsymbol{s}\big] = f(\partial\boldsymbol{s}) - g(\partial s) - \partial D\partial\boldsymbol{s} = D\partial\partial\boldsymbol{s} = 0.$$

Assim, $f(\boldsymbol{s}) - g(\boldsymbol{s}) - D\partial\boldsymbol{s}$ é um ciclo no complexo acíclico $\Gamma(s)$. Portanto, podemos escolher uma cadeia $D(\boldsymbol{s}) \in C_r(\Gamma(s)) \subset C_r(L)$ tal que $\partial D(\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{s}) - g(\boldsymbol{s}) - D\partial(\boldsymbol{s})$. Isto completa a definição da homotopia algébrica $D$ e a demonstração do teorema. □

**Corolário 2.** *Duas aplicações simpliciais contíguas* $f, g\colon K \to L$ *induzem o mesmo homomorfismo* $f_* = g_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ *em cada grupo de homologia.*

O morfismo $Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$, que induz o isomorfismo entre os grupos de homologia do poliedro $K$ e de sua subdivisão baricêntrica, $K'$ é definido por indução. Se $a \in K$ é um vértice, pomos $Sd(a) = a$. Supondo definido $Sd\colon C_{r-1}(K) \to C_{r-1}(K')$ pomos, para cada $r$-simplexo $s$ em $K$, $Sd(\boldsymbol{s}) = b_s * Sd(\partial\boldsymbol{s})$. Se $x = \sum a_i\boldsymbol{s_i}$ é uma cadeia em $C_r(K)$, pomos $Sdx = \sum a_i \cdot Sd(\boldsymbol{s_i})$. Admitindo,

indutivamente, que vale $\partial(Sdx) = Sd(\partial x)$ quando a cadeia $x$ tem dimensão $\leq r-1$ e usando a igualdade $\partial(a * x) = x - a * \partial x$, vê-se que $\partial(Sdx) = Sd(\partial x)$ também para $\dim x = r$. Isto completa a verificação de que $Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$ é um morfismo.

A fim de provar que $Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$ induz isomorfismos nos grupos de homologia, definiremos o morfismo $\varphi\colon \mathcal{C}(K') \to \mathcal{C}(K)$ que será o inverso homotópico (algébrico) de $Sd$. Na realidade, $\varphi$ será induzido por uma aplicação simplicial de mesmo nome, $\varphi\colon K' \to K$, que começa com a introdução, entre os vértices de $K$, de uma relação de ordem segundo a qual os vértices de um mesmo simplexo ficam linearmente ordenados. (Poderíamos mesmo tomar uma ordem linear entre todos os vértices de $K$.)

Lembrando que os vértices de $K'$ são os baricentros dos simplexos de $K$, definimos a aplicação simplicial $\varphi\colon K' \to K$ pondo, para cada simplexo $s \in K$, $\varphi(b_s) =$ "maior" vértice de $s$.

Por exemplo, se $s = \langle a, b, c\rangle$ é um triângulo cujos vértices foram ordenados alfabeticamente então os vértices de $s'$ são $a$, $b$, $c$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ onde $b_1 = (a+b)/2$, $b_2 = (a+c)/2$, $b_3 = (b+c)/2$, $b_4 = (a+b+c)/3$ e $\varphi\colon s' \to s$ é dada por $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = c$, $\varphi(b_1) = b$, $\varphi(b_2) = c$, $\varphi(b_3) = c$ e $\varphi(b_4) = c$. Vemos assim que $\varphi$ transforma o triângulo $\langle a, b_1, b_4\rangle$ sobre $s$ e os demais triângulos de $s'$ são colapsados em lados ou vértices de $s$.

De um modo geral, todo $r$-simplexo $s$ em $K$ é subdividido em $r$-simplexos de $s'$, um único dos quais é transformado por $\varphi$ sobre $s$ enquanto os demais são reduzidos a faces de dimensão menor, de modo que o morfismo $\varphi\colon C_r(K') \to C_r(K)$ os aplica em 0.

Tendo definido os morfismos

$$Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K') \quad \text{e} \quad \varphi\colon \mathcal{C}(K') \to \mathcal{C}(K),$$

observamos que cada um dos compostos

$$Sd \circ \varphi\colon \mathcal{C}(K') \to \mathcal{C}(K') \quad \text{e} \quad \varphi \circ Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$$

é transportado pela aplicação identidade respectiva, a qual é o transporte acíclico mais simples que existe. (Na verdade, $\varphi \circ Sd$ é a própria aplicação identidade.) Segue-se então que, para todo $r$, tem-se

$$(Sd)_* \circ \varphi_* = (Sd \circ \varphi)_* = \mathrm{id}\colon H_r(K') \to H_r(K')$$

e

$$\varphi_* \circ (Sd)_* = (\varphi \circ Sd)_* = \mathrm{id}\colon H_r(K) \to H_r(K),$$

portanto $(Sd)_*\colon H_r(K) \to H_r(K')$ é um isomorfismo.

**Observação.** Se, para cada simplexo $s$ em $K$, escolhermos arbitrariamente um ponto $b_s$ em seu interior (não necessariamente o baricentro), toda a argumentação acima se aplica. A subdivisão baricêntrica só se faz essencial quando tivermos de utilizar o Teorema 4, conforme faremos na seção seguinte.

A subdivisão baricêntrica e o morfismo $Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$ por ela induzido são "naturais" no sentido seguinte: uma aplicação simplicial $\varphi\colon K \to L$ induz, entre as subdivisões baricêntricas $K'$ e $L'$, uma aplicação simplicial $\varphi'\colon K' \to L'$ de tal modo que (continuando a indicar com o mesmo símbolo a aplicação simplicial $\varphi$ e o morfismo por ela induzido nos complexos de cadeias) o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}(L) \\ {\scriptstyle Sd}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Sd} \\ \mathcal{C}(K') & \xrightarrow{\varphi'} & \mathcal{C}(L') \end{array}$$

A fim de definir $\varphi'\colon K' \to L'$, lembramos que um vértice qualquer de $K'$ é o baricentro $b_s$ de um simplexo $s = \langle a_0, \ldots, a_r \rangle$ em $K$. Então as imagens $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_r)$ são vértices (não necessariamente distintos) de um simplexo de $L$. Pomos $\varphi'(b_s)$ = baricentro do simplexo de $L$ cujos vértices são os elementos distintos da lista $(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_r))$. Se não houver repetição nela, então $\dim \varphi(s) = s$ e $\varphi'(b_s) = b_{\varphi(s)}$.

A comutatividade do diagrama acima será provada por indução. O morfismo $\varphi'\colon \mathcal{C}(K') \to \mathcal{C}(L')$, induzido pela aplicação simplicial $\varphi'\colon K' \to L'$, é tal que, para todo simplexo orientado $\boldsymbol{t} = [b_{s_0}, \dots, b_{s_r}]$ em $K'$, tem-se $\varphi'(\boldsymbol{t}) = [b_{\varphi(s_0)}, \dots, b_{\varphi(s_r)}]$. [Lembrando que $[a_0, \dots, a_r] = 0$ quando $a_i = a_j$ para algum $i \neq j$.] Dado um $r$-simplexo $s$ em $K$, é imediato que $Sd\,\varphi(\boldsymbol{s}) = 0 = \varphi'(Sd\,\boldsymbol{s})$ caso $\varphi(\boldsymbol{s})$ seja degenerado. Supondo que este não seja o caso e admitindo a comutatividade em dimensão $r-1$, temos $Sd\,\boldsymbol{s} = \sum(-1)^i\, b_s * Sd\,\boldsymbol{s}_{(i)}$ logo

$$\begin{aligned}\varphi'(Sd\,\boldsymbol{s}) &= \sum(-1)^i\,\varphi'(b_s * Sd\,\boldsymbol{s}_{(i)}) = \sum(-1)^i\, b_{\varphi(s)} * \varphi'(Sd\,\boldsymbol{s}_{(i)}) \\ &= \sum(-1)^i\, b_{\varphi(s)} * Sd\,\varphi(\boldsymbol{s}_{(i)}) = \sum(-1)^i\, b_{\varphi(s)} * Sd(\varphi(\boldsymbol{s})_{(i)}) \\ &= Sd\,\varphi(\boldsymbol{s}).\end{aligned}$$

É claro que, dada uma aplicação simplicial $\varphi\colon K \to L$, uma iteração óbvia fornece, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma aplicação simplicial $\varphi^{(n)}\colon K^{(n)} \to L^{(n)}$ entre as $n$-ésimas subdivisões baricêntricas $K^{(n)}$ e $L^{(n)}$, de tal modo que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & L \\ {\scriptstyle Sd^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Sd^n} \\ K^{(n)} & \xrightarrow{\varphi^{(n)}} & L^{(n)}. \end{array}$$

# 5 Aproximação simplicial

A fim de definir o homomorfismo induzido em homologia por uma aplicação contínua $f\colon K \to L$ entre poliedros, substitui-se $f$ por uma aproximação simplicial, analogamente à aproximação diferenciável utilizada no caso da cohomologia de deRham.

A *estrela* do vértice $a$ num poliedro $K$ é a reunião $St(a)$ dos simplexos abertos de $K$ que têm $a$ como um dos seus vértices. $St(a)$

é uma vizinhança aberta de $a$ em $K$ pois seu complemento $K-St(a)$ é a reunião dos simplexos abertos que não têm $a$ como vértice e, se $a$ não é vértice de um simplexo aberto, também não é vértice do seu fecho.

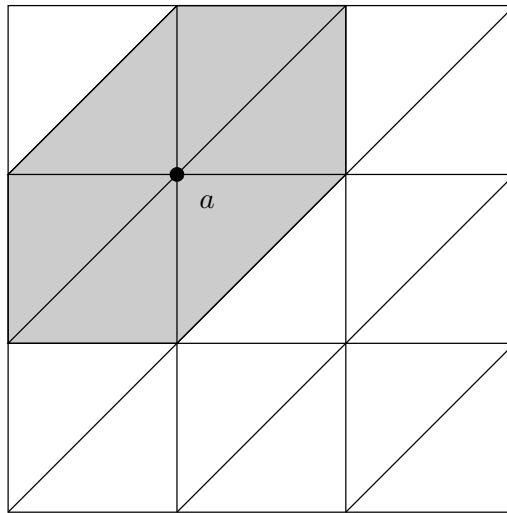



**Figura 21.** A estrela do vértice $a$ no toro $T^2$.

O conjunto das estrelas dos vértices de um poliedro $K$ é uma cobertura aberta de $K$. Na verdade, toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $K$ pode ser refinada pela cobertura formada pelas estrelas de alguma subdivisão baricêntrica iterada $K^{(n)}$. De fato, basta considerar o número de Lebesgue $\delta$ da cobertura $\mathcal{U}$ [AR2, pag.176] e tornar $n$ tal que todo simplexo em $K^{(n)}$ tenha diâmetro menor do que $\delta$.

Sejam $K$ e $L$ poliedros. Uma aplicação simplicial $\varphi\colon K \to L$ chama-se uma *aproximação simplicial* de $f\colon K \to L$ quando cumpre a seguinte condição:

Se $a \in K$ é vértice do simplexo aberto que contém o ponto $x \in K$ então $\varphi(a)$ é vértice do simplexo aberto de $L$ que contém $f(x)$.

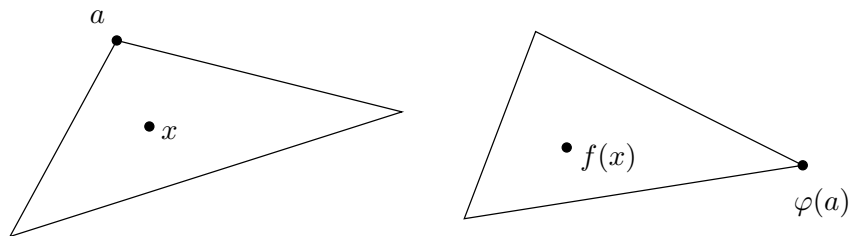



**Figura 22.**

Noutras palavras, $\varphi$ é uma aproximação simplicial de $f$ quando, para todo vértice $a \in K$, tem-se $f(St(a)) \subset St(\varphi(a))$.

Observemos que, dada $f\colon K \to L$, se $\varphi$ é uma aplicação de vértices de $K$ em vértices de $L$ tal que $f(St(a)) \subset St(\varphi(a))$ para todo vértice $a \in K$ então $\varphi$ é simplicial, ou seja, para todo simplexo $s = \langle a_0, \ldots, a_r \rangle$ em $K$, os pontos $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_r)$ são vértices de um simplexo em $L$. Com efeito, se $s = \langle a_0, \ldots, a_r \rangle$ é um simplexo em $K$, tomamos um ponto $x$ no interior de $s$. Então $x \in St(a_0) \cap \cdots \cap St(a_r)$ logo $f(x) \in St(\varphi(a_0)) \cap \cdots \cap St(\varphi(a_r))$. Logo o simplexo de $L$ que contém $f(x)$ em seu interior tem $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_r)$ como vértices.

Para efeito do próximo teorema, lembremos que a $n$-ésima subdivisão baricêntrica $K^{(n)}$ do poliedro $K$ é, como conjunto de pontos, o mesmo que $K$, apenas subdividido num número maior de simplexos menores. Assim, uma aplicação contínua $f\colon K \to L$ é o mesmo que $f\colon K^{(n)} \to L$.

**Teorema 6.** *Toda aplicação contínua $f\colon K \to L$ entre poliedros possui uma aproximação simplicial $\varphi\colon K^{(n)} \to L$ para $n$ suficientemente grande.*

**Demonstração:** Seja $\delta$ um número de Lebesgue da cobertura aberta de $L$ formada pelas estrelas de seus vértices. Pela continuidade uniforme de $f$, existe $\varepsilon > 0$ tal que todo subconjunto de

$K$ com diâmetro inferior a $\varepsilon$ tem imagem com diâmetro $< \delta$, logo contida na estrela de algum vértice de $L$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que todos os simplexos da subdivisão baricêntrica $K^{(n)}$ têm diâmetro menor do que $\varepsilon/2$. Então, para todo vértice $a$ em $K^{(n)}$, a estrela $St(a)$ tem diâmetro menor do que $\varepsilon$, logo podemos escolher, para todo vértice $a$ em $K^{(n)}$, um vértice $\varphi(a)$ em $L$ tal que $f(St(a)) \subset St(\varphi(a))$. A aplicação simplicial $\varphi\colon K^{(n)} \to L$ assim definida é uma aproximação simplicial de $f$.

Estamos agora em condições de mostrar que uma aplicação contínua $f\colon K \to L$ entre poliedros induz, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ com a importante propriedade de que se $g\colon L \to M$ é outra aplicação contínua, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon H_r(K) \to H_r(M)$. Como a aplicação identidade induz o homomorfismo identidade, resultará que se $f\colon K \to L$ é um homeomorfismo cujo inverso é $f^{-1}\colon L \to K$ então $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ será para todo $r \geq 0$, um isomorfismo, com $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*\colon H_r(L) \to H_r(K)$. Isto nos permitirá concluir que os grupos de homologia de um espaço topológico triangulável $X$ são topologicamente invariantes. Mais precisamente, se $f\colon K \to X$ e $g\colon L \to X$ forem homeomorfismos de poliedros $K$, $L$ sobre $X$ então $(g^{-1} \circ f)_* = (g_*)^{-1} \circ f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ será um isomorfismo, para todo $r \geq 0$.

A fim de definir o homomorfismo induzido em homologia por uma aplicação contínua $f\colon K \to L$ entre poliedros, começamos usando o Teorema 6, segundo o qual existe uma aplicação simplicial $\varphi\colon K^{(n)} \to L$, definida, para um certo $n \in \mathbb{N}$, na $n$-ésima subdivisão baricêntrica de $K$, a qual é uma aproximação simplicial de $f$. Então pomos

$$f_* = (\varphi \circ Sd^n)_* = \varphi_* \circ (Sd^n)_*\colon H_r(K) \to H_r(L),$$

onde $Sd^n\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K^{(n)})$ é o morfismo dado pela iteração da subdivisão baricêntrica $Sd\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K')$.

Para um dado $n$, esta definição de $f_*$ não depende da aproximação simplicial $\varphi$ escolhida pois duas quaisquer delas são contí-

guas, logo induzem o mesmo homomorfismo em homologia. Resta ver se a definição de $f_*$ não depende quantas vezes $Sd$ foi iterada. Ora, se iterarmos $Sd$ $m+n$ vezes, com uma aproximação simplicial $\varphi\colon K^{(m+n)} \to L$ para $f$, chegaremos ao diagrama no

qual chamamos de $\varphi$ e $\psi$ (como de hábito) os morfismos de cadeias induzidos pelas aplicações simpliciais de mesmo nome. A nível de homologia, esse diagrama é comutativo, isto é, tem-se $\varphi_* = \psi_* \circ (Sd^m)_* = (\psi \circ Sd^m)_*$ pois os morfismos $\varphi$ e $\psi \circ Sd^m$ são ambos transportados por $\Gamma$, onde $\Gamma$ é o transporte acíclico que associa a cada simplexo $s$ em $K^{(n)}$ o subcomplexo $\Gamma(s) = \mathcal{C}(\varphi(s)) \subset \mathcal{C}(L)$. Portanto

$$
\begin{aligned}
f_* &= (\varphi \circ Sd^n)_* = \varphi_* \circ (Sd^n)_* = (\psi \circ Sd^m)_* \circ (Sd^n)_* \\
&= (\psi \circ Sd^m \circ Sd^n)_* = (\psi \circ Sd^{m+n})_*
\end{aligned}
$$

e a definição de $f_*$, por conseguinte, não depende de $n$.

Mostremos, em seguida, que se $f\colon K \to L$ e $g\colon L \to M$ são aplicações contínuas entre os poliedros $K$, $L$ e $M$ então vale a igualdade $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon H_r(K) \to H_r(M)$, para todo $r \geq 0$.

Com efeito, se $\psi\colon \mathcal{C}(L^{(n)}) \to \mathcal{C}(M)$ e $\varphi\colon \mathcal{C}(K^{(m)}) \to \mathcal{C}(L^{(n)})$ são morfismos induzidos por aproximações simpliciais $\psi\colon L^{(n)} \to M$ e $\varphi\colon K^{(m)} \to L^{(n)}$ respectivamente, então $f_* = (\varphi \circ Sd^m)_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ e, posto que $\psi \circ \varphi^{(n)}\colon K^{(m+n)} \to M$ é uma aproximação simplicial de $g \circ f$, temos $(g \circ f)_* = (\psi \circ \varphi^{(n)} \circ Sd^n \circ Sd^m)_*\colon H_r(K) \to$

$H_r(M)$. Mas, em virtude da comutatividade do diagrama abaixo, podemos escrever:

$$(g \circ f)_* = (\varphi \circ \varphi^{(n)} \circ Sd^n \circ Sd^m)_* = (\psi \circ Sd^n) \circ (\varphi \circ Sd^m) = g_* \circ f_* \,.$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{C}(K) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle Sd^m} & & & & \\
\mathcal{C}(K^{(m)}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}(L) & & \\
\downarrow{\scriptstyle Sd^n} & & \downarrow{\scriptstyle Sd^n} & & \\
\mathcal{C}(K^{(m+n)}) & \xrightarrow{\varphi^{(n)}} & \mathcal{C}(L^{(n)}) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}(M)
\end{array}$$

Resumindo: acabamos de provar que toda aplicação contínua $f\colon K \to L$, entre poliedros, induz, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ de tal modo que se $g\colon L \to M$ também é contínua então o homomorfismo induzido pela aplicação composta $g \circ f\colon K \to M$ é $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon H_r(K) \to H_r(M)$.

Além disso, como a aplicação identidade induz o homomorfismo identidade, segue-se que, se $f\colon K \to L$ é um homeomorfismo então, para todo $r \geq 0$, $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ é um isomorfismo e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Na linguagem da Álgebra Homológica, isto exprime que $K \mapsto H_r(K)$ é um *functor* da categoria dos espaços trianguláveis na categoria dos $A$-módulos.

A fim de provar que duas aplicações contínuas homotópicas $f, g\colon K \to L$ entre poliedros induzem iguais homomorfismos $f_* = g_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ para todo $r \geq 0$, é necessário dar uma estrutura de poliedro ao produto cartesiano $K \times [0,1]$.

De um modo geral, o produto cartesiano $K \times L$ de dois poliedros pode, de várias maneiras, ser decomposto simplicialmente como poliedro. Um modo de fazer isto consiste em observar primeiro que $K \times L$ é a reunião dos produtos $s \times t$ de um simplexo $s \in K$ por um simplexo $t \in L$ e, em seguida, notar que o bordo $(s \times t)^\bullet$ do

conjunto convexo $s\times t$ é $(s\times t)^\bullet = (s^\bullet \times t)\cup(s\times \overset{\bullet}{t})$. Então, admitindo indutivamente que cada produto $s_1 \times t_1$ com $\dim s_1 + \dim t_1 < \dim s + \dim t$ já foi decomposto simplicialmente (portanto $s \times t)^\bullet$ já é um poliedro), fixar um ponto $p_{st}$ no interior de cada $s \times t$ e considerar este produto como o cone $p_{st} * (s\times t)^\bullet$, portanto como um poliedro, obtendo deste modo a decomposição simplicial de $K \times L$.

No caso particular em que $L = [0,1]$, há um modo mais simples e mais conveniente de considerar o produto cartesiano $K\times[0,1]$ como poliedro (imitando a forma como Euclides decompôs um prisma de base triangular como reunião de três pirâmides justapostas, a fim de calcular o volume da pirâmide).

Temos $K \times [0,1] = \bigcup\limits_{s\in K} s \times [0,1]$, de modo que basta descrever, para cada simplexo $s = \langle a_0,\dots,a_r\rangle$ em $K$, quais os simplexos que decompõem o prisma $s \times [0,1]$ como poliedro.

Para cada vértice $a_i$ do simplexo $s$, ponhamos $\bar{a}_i = (a_i, 0)$ e $\bar{\bar{a}}_i = (a_i, 1)$. Então

$$s \times [0,1] = \bigcup_{i=0}^{r} \langle \bar{a}_0,\dots,\bar{a}_i,\bar{\bar{a}}_i,\bar{\bar{a}}_{i+1},\dots,\bar{\bar{a}}_r\rangle$$

e esta é a decomposição de $d \times [0,1]$ como reunião dos simplexos $(r+1)$-dimensionais $\langle\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_i,\bar{\bar{a}}_i,\dots,\bar{\bar{a}}_r\rangle$.

Definamos, em seguida, as aplicações simpliciais $\alpha,\beta\colon K \to K\times [0,1]$ pondo, para cada simplexo $s = \langle a_0,\dots,a_r\rangle$ em $K$, $\alpha(s) = \langle\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_r\rangle$ e $\beta(s) = \langle\bar{\bar{a}}_0,\dots,\bar{\bar{a}}_r\rangle$. Como sempre, indiquemos ainda com $\alpha,\beta\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K\times[0,1])$ os morfismos induzidos por $\alpha$ e $\beta$ no complexo de cadeias $\mathcal{C}(K)$.

**Lema 1.** *Os morfismos $\alpha,\beta\colon \mathcal{C}(K)\to\mathcal{C}(K\times[0,1])$ são algebricamente homotópicos.*

**Demonstração:** Para cada $r \geq 0$, definamos o homomorfismo $D\colon C_r(K) \to C_{r+1}(K \times [0,1])$ estipulando que $D(\boldsymbol{s}) = \sum(-1)^i\cdot [\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_i,\bar{\bar{a}}_i,\dots,\bar{\bar{a}}_r]$ seja a imagem do $r$-simplexo orientado

$\boldsymbol{s} = [a_0, \dots, a_r]$ de $K$. Uma verificação cuidadosa, mas inteiramente mecânica, mostra que, para todo simplexo $s$, e portanto pra toda cadeia em $C_r(K)$, tem-se $\partial D(\boldsymbol{s}) + D(\partial \boldsymbol{s}) = \beta(\boldsymbol{s}) - \alpha(\boldsymbol{s})$. Geometricamente, esta igualdade significa que, com um ajuste nas orientações, o bordo do prisma $s \times [0,1]$ com base no simplexo $s$ é igual ao prisma sobre o bordo de $s$ (ou seja, a reunião das faces laterais) mais a base $\alpha(s)$ e o topo $\beta(s)$.

**Exemplo 13.** Usando uma notação condensada, a fim de simplificar a escrita, o prisma sobre o triângulo orientado $\boldsymbol{s} = abc$ é $D\,abc = \bar{a}\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{\bar{c}}$ (soma de três tetraedros). Então

$$\partial Dabc = \bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{\bar{a}}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} - \bar{b}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{b}} + \bar{b}\bar{c}\bar{\bar{c}}$$
$$- \bar{a}\bar{c}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

Como $\partial abc = bc - ac + ab$, temos

$$D\partial abc = \bar{b}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} - \bar{b}\bar{c}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{\bar{a}}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{c}\bar{\bar{c}} + \bar{a}\bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} - \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{b}}.$$

Segue-se que $\partial Dabc + D\partial abc = \bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}} - \bar{a}\bar{b}\bar{c}$. ou seja, $\partial Ds + D\partial s = \beta(s) - \alpha(s)$. Este exemplo fornece uma verificação explícita do Lema 1 para um simplexo $s$ de dimensão 2.

**Teorema 7.** *Sejam $K$ e $L$ poliedros. Aplicações contínuas homotópicas $f, g\colon K \to L$ induzem homomorfismos iguais $f_* = g_* : H_r(K) \to H_r(L)$ nos grupos de homologia.*

**Demonstração:** Seja $H\colon K \times [0,1] \to L$ uma homotopia entre $f$ e $g$. Isto significa que, considerando as aplicações simpliciais $\alpha, \beta\colon K \to K \times [0,1]$, dadas por $\alpha(x) = (x,0)$ e $\beta(x) = (x,1)$ para todo $x \in K$, temos $H \circ \alpha = f$ e $H \circ \beta = g$. Ora, segundo o Lema 1, os morfismos $\alpha, \beta\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K \times [0,1])$ são algebricamente homotópicos, portanto induzem os mesmos homomorfismos $\alpha_* = \beta_*\colon H_r(K) \to H_r(K \times [0,1])$ nos grupos de homologia. Segue-se que

$f_* = (H \circ \alpha)_* = H_* \circ \alpha_* = H_* \circ \beta_* = (H \circ \beta)_* = g_* \colon H_r(K) \to H_r(L)$ para todo $r \geq 0$.

**Corolário 3.** *Dois poliedros com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia isomorfos.*

Em particular, todo poliedro contrátil é acíclico. Esta é outra forma de concluir que o grupo de homologia de uma bola é igual a zero em toda dimensão positiva e que os grupos de homologia de um anel circular são iguais ao anel de coeficientes em dimensões 0 e 1 e iguais a zero nas demais dimensões pois o anel circular tem o tipo de homotopia de $S^1$.

# 6 Pseudo-variedades

Um poliedro $M$ chama-se uma *pseudo-variedade* $n$-dimensional quando cumpre as seguintes condições:

a) Todo simplexo de $M$ é face de algum simplexo $n$-dimensional;

b) Todo $(n-1)$-simplexo de $M$ é face de precisamente dois $n$-simplexos;

c) Dois quaisquer $n$-simplexos $s$, $t$ em $M$ são encadeados, isto é, existem $n$-simplexos $s_0, \ldots, s_k$ em $M$ tais que $s_0 = s$, $s_k = t$ e, para cada $i = 0, \ldots, k-1$, $s_i \cap s_{i+1}$ é uma face de dimensão $n-1$.

Dois $n$-simplexos que têm uma face comum de dimensão $n-1$ chamam-se *adjacentes*.

**Exemplo 14.** A esfera $S^n$, triangulada como o bordo de um $(n+1)$-simplexo, é uma pseudo-variedade $n$-dimensional. O toro $T^2$ e o plano projetivo, vistos nos Exemplos 11 e 12, são pseudo-variedades de dimensão 2. De um modo geral, prova-se que toda superfície diferenciável é triangulável e que toda sua triangulação é realizada por uma pseudo-variedade. A Figura 23 exibe uma pseudo-variedade que não é uma superfície.

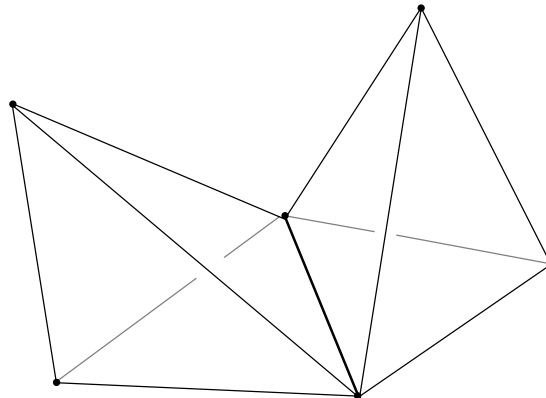



**Figura 23.**

**Teorema 8.** *Seja $M$ uma pseudo-variedade $n$-dimensional. Tomando coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, tem-se $H_n(M) = \mathbb{Z}_2$. Com coeficientes em $\mathbb{Z}$, tem-se $H_n(M) = \mathbb{Z}$ ou $H_n(M) = 0$.*

**Demonstração:** Considerando coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, seja $\Gamma = \sum s$ a soma de todos os simplexos $n$-dimensionais de $M$. (Não há necessidade de orientá-los pois $-\boldsymbol{s} = -1\boldsymbol{s} = 1\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}$.) Em virtude da condição b), tem-se $\partial\Gamma = 2 \cdot \sum t$ (soma estendida a todos os simplexos $(n-1)$-dimensionais) logo $\partial\Gamma = 0$ e $\Gamma$ é um $n$-ciclo em $M$, o qual não é homólogo a zero pois não há cadeias de dimensão $n+1$. Como os coeficientes só podem ser 0 ou 1, toda $n$-cadeia é uma soma $x = s_1 + \cdots + s_k$, de alguns $n$-simplexos. Se $\partial x = 0$ e $s$ é uma parcela desta soma então todo simplexo $s'$, adjacente a $s$ também é parcela, a fim de anular em $\partial x$ o coeficiente da face $t = s \cap s'$. Resulta então da condição c) que o ciclo $x$ ou é igual a 0 ou igual a $\Gamma$. Portanto $H_n(M) = Z_n(M) = \mathbb{Z}_2$. Vejamos agora o caso de coeficientes inteiros. Há duas possibilidades. A primeira é que seja possível escolher, para cada $n$-simplexo $s$ em $M$, uma orientação $\boldsymbol{s}$ de tal modo que simplexos adjacentes induzam na face comum orientações opostas. Com essas escolhas, a

cadeia $\Gamma = \sum_{s \in M} \boldsymbol{s}$ é um ciclo, não homólogo a zero pois não há simplexos de dimensão $n+1$. Além disso, se $z = \sum_{s \in M} m_s \boldsymbol{s}$ é um $n$-ciclo, atribuindo arbitrariamente orientações aos $(n-1)$-simplexos $t$ de $M$, teremos $0 = \partial z = \sum_{t \in M} k_t \boldsymbol{t}$. Se $s$ e $s'$ são $n$-simplexos adjacentes, com $s \cap s' = t$, tem-se $0 = k_t = m_s - m_{s'}$. Portanto, se $z = \sum m_s \boldsymbol{s}$ é um $n$-ciclo, vale $m_s = m_{s'}$ sempre que $s$ e $s'$ forem adjacentes. Segue-se da condição c) que $m_s = m_{s'}$ quaisquer que sejam os $n$-simplexos $s$, $s'$, isto é, que $z = m \cdot \sum \boldsymbol{s} = m \cdot \Gamma$. Conclusão: todo $n$-ciclo em $M$ é um múltiplo de $\Gamma$ e $H_n(M) = Z_n(M) = \mathbb{Z}$.

A segunda possibilidade é a negação da primeira: que não seja possível orientar todos os $n$-simplexos de $M$ de tal modo que simplexos adjacentes $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ induzam sobre a face comum $t = s \cap s'$ orientações opostas. Neste caso, afirmamos, o único $n$-ciclo é 0, logo $H_n(M) = 0$. De fato, se $z = \sum_{s \in M} m_s \boldsymbol{s}$ é um $m$-ciclo então $0 = \partial z = \sum_{t \in M} k_t \boldsymbol{t}$, logo $k_t = 0$ para todo $(n-1)$-simplexo $t$ em $M$. Dado $t$, se $s$ e $s'$ são os dois $n$-simplexos tais que $t = s \cap s'$, temos $0 = k_t = \pm m_s \pm m_{s'}$, os sinais sendo $+$ ou $-$ conforme as orientações induzidas por $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{s}'$ sobre $t$. Seja como for, temos $|m_s| = |m_{s'}|$ para dois quaisquer $n$-simplexos adjacentes e, por c), para quaisquer dois $n$-simplexos $s$, $s'$. Então o ciclo $z$ é a soma de parcelas do tipo $m \cdot \boldsymbol{s}$ ou $-m \cdot \boldsymbol{s}'$, com o mesmo $m$ para todo $s$. Como $-m \cdot \boldsymbol{s} = m \cdot -\boldsymbol{s}$, trocando a orientação de $s$ quando necessário, podemos escrever $z = m \cdot \sum_{s \in M} \boldsymbol{s}$. Como $\partial z = 0$, concluímos que ou $m = 0$ ou $\sum_{s \in M} \boldsymbol{s}$ é um ciclo, o que significaria que as novas orientações fazem com que cada um dos $(n-1)$-simplexos herde orientações opostas dos dois $n$-simplexos que sobre ele incidem, o que contradiz nossa hipótese. Concluímos então que $m = 0$, ou seja, que todo $n$-ciclo é nulo e $H_n(M) = 0$. □

Uma pseudo-variedade $n$-dimensional $M$ chama-se *orientável* quando é possível atribuir a cada um dos seus $n$-simplexos uma

orientação de tal modo que $n$-simplexos adjacentes induzam orientações opostas sobre a face comum. (Diz-se então que eles estão *coerentemente* orientados.) Um tal processo determina um $n$-ciclo $\Gamma = \sum \boldsymbol{s}$, que gera $H_n(M)$ e é chamado uma *orientação* de $M$. (Note que o ciclo $\Gamma$ é sua própria classe de homologia, pois não há cadeias de dimensão $n+1$.) Quando não se podem orientar coerentemente os $n$-simplexos de $M$ então não há $n$-ciclos com coeficientes inteiros e $M$ diz-se não-orientável. O Teorema 8 diz que, usando coeficientes inteiros, tem-se $H_n(M) = \mathbb{Z}$ se $M$ é orientável e $H_n(M) = 0$ se $M$ é não-orientável.

**Exemplo 15.** A esfera $S^n$ e o toro $T^2$ são pseudo-variedades orientáveis. Já o plano projetivo $P^2$ é uma pseudo-variedade não-orientável pois seu grupo de homologia $H_2(P^2)$ com coeficientes inteiros é igual a zero. $\triangleleft$

Uma *rota* numa pseudo-variedade $n$-dimensional $M$ e uma seqüência $R = (\boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_k})$ de $n$-simplexos tais que, para todo $i = 1, \ldots, k-1$, $\boldsymbol{s_i}$ e $\boldsymbol{s_{i+1}}$ são adjacentes e coerentemente orientados. Se $\boldsymbol{s_k} = -\boldsymbol{s_1}$, diz-se que a rota $R$ é um *circuito desorientador*.

Seja $\boldsymbol{s}$ um $n$-simplexo orientado em $M$. Dado qualquer outro $n$-simplexo $t$, existe uma rota $R$ começando em $\boldsymbol{s}$ e terminado no simplexo orientado $\boldsymbol{t}$. Se outra rota $R'$ começar em $\boldsymbol{s}$ e terminar em $-\boldsymbol{t}$ então a rota composta $R'R^{-1}$ (definição óbvia) é um circuito desorientador. Portanto, se não há em $M$ circuitos desorientadores, um $n$-simplexo orientado $\boldsymbol{s}$ determina, de modo unívoco, orientação em todos os $n$-simplexos $t$ de $M$, o que faz de $M$ uma pseudo-variedade orientada. Reciprocamente, se $M$ é orientada, não pode haver circuito desorientador em $M$, pois os simplexos de uma rota ou são todos orientados positiva ou negativamente em relação a $M$.

Em suma: uma pseudo-variedade é orientável se, e somente se, não admite circuitos desorientadores.

Se a pseudo-variedade $n$-dimensional $M$ é não-orientável então todo $n$-simplexo orientado $\boldsymbol{s}$ em $M$ é elemento de algum circuito

desorientador. Com efeito, se $R'$ é um circuito desorientador em $M$, tomamos uma rota $R$ começando em $\boldsymbol{s}$ e terminando num elemento qualquer de $R'$. Então a rota composta $RR'R^{-1}$ é um circuito desorientador que começa e termina em $\boldsymbol{s}$. (Poderia ser alegado que o simplexo final de $R$ talvez ocorra em $R'$ com a orientação contrária. Mas se este for o caso, inverte-se a orientação de todos os simples de $R'$, continuando ainda com um circuito desorientador.)

No que se segue, consideraremos o espaço projetivo $n$-dimensional $P^n$. Ele é o quociente da esfera $S^n$ pela relação de equivalência que identifica cada ponto $x \in S^n$ com o seu simétrico $-x$. A fim de dotar $P^n$ de uma estrutura de poliedro, começamos com uma triangulação de $S^n$ que seja simétrica em relação à origem, isto é, que contenha, junto com cada simplexo $s = \langle a_0, \ldots, a_r \rangle$, seu simétrico $-s = \langle -a_0, \ldots, -a_r \rangle$. Este é o caso da *triangulação octaédrica*, que vamos adotar. Ela consiste nos $2^{n+1}$ $n$-simplexos $s = \langle \pm e_0, \ldots, \pm e_{n+1} \rangle$ e suas faces. É claro que, para cada um deles, seu simétrico $-s$ também pertence à família.

Com a triangulação octaédrica, a definição explícita de uma orientação é imediata. Com efeito, cada $s$-simplexo $s = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ origina uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ cujas colunas são $a_0, \ldots, a_n$, nesta ordem. Daremos a $s$ a orientação $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_n]$ quando o determinante dessa matriz for positivo. Diremos então que $\boldsymbol{s}$ é *positivo.*

A fim de ver que isto fornece uma orientação em $S^n$, mostraremos que dois $n$-simplexos positivos adjacentes induzem orientações opostas na face comum. Ora, $n$-simplexos adjacentes têm a forma $s = \langle a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_r \rangle$ e $s' = \langle a_0, \ldots, -a_i, \ldots, a_r \rangle$. Como $\det[a_0, \ldots, -a_0, \ldots, a_r] = -\det[a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_r]$, se supusermos que $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_r]$ é positivo então a orientação positiva de $s'$ será $-\boldsymbol{s}' = -[a_0, \ldots, -a_0, \ldots, a_r]$. As orientações induzidas pelos simplexos positivos $\boldsymbol{s}$ e $-\boldsymbol{s}'$ sobre a face comum $t = \langle a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r \rangle = \langle a_0, \ldots, -\widehat{a_i}, \ldots, a_r \rangle$ são respectivamente $(-1)^i[a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots,$

$a_r]$ e $(-1)^{i+1}[a_0, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, a_r]$, portanto são opostas.

Um papel essencial no estudo do espaço projetivo $P^n$ é desempenhado pela *aplicação antípoda* $\alpha\colon S^n \to S^n$, definida por $\alpha(x) = -x$. Se, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, chamarmos de $\alpha_i\colon S^n \to S^n$ a *reflexão* dada por $\alpha_i(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$, é claro que $\alpha = \alpha_0 \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n$.

O homomorfismo $\alpha_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$, induzido pela aplicação antípoda $\alpha$, é a multiplicação por $(-1)^{n+1}$. Para concluir isto, basta mostrar que cada $\alpha_i$ induz o homomorfismo $(\alpha_i)_*\colon H_(S^n) \to H_n(S^n)$ que consiste na multiplicação por $-1$.

De fato, para cada $n$-simplexo orientado $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_n]$, temos $\alpha_i(\boldsymbol{s}) = [a_0, \ldots, -a_i, \ldots, a_n] = -\boldsymbol{s}$.

Em particular, se $n$ é par então $\alpha_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ é a multiplicação por $-1$.

Portanto, no caso em que $n$ é par, os simplexos orientados $\boldsymbol{s}' = [a_0, \ldots, a_n]$ e $\boldsymbol{s}'' = [-a_0, \ldots, -a_n] = \alpha(\boldsymbol{s})$ não podem ser parcelas da mesma soma $\Gamma = \sum_{s \in M} \boldsymbol{s}$ quando $\partial\Gamma = 0$.

Tratemos agora do espaço projetivo $P^n$.

Formalmente, os pontos de $P^n$ são os pares não-ordenados $\{x,-x\}$, $x \in S^n$. A aplicação $\pi\colon S^n \to P^n$, dada por $\pi(x) = \{x, -x\}$, é chamada a *projeção natural*. Por definição, um conjunto $U \subset P^n$ é aberto quando $\pi^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de $S^n$. Isto faz de $P^n$ um espaço topológico compacto e de $\pi$ uma aplicação contínua (de fato, um homeomorfismo local). $P^n$ pode ser representado como uma superfície do espaço euclidiano, como em [AR3, pag.66], ou como um poliedro, a saber, a realização geométrica do esquema simplicial que mostraremos agora.

A projeção natural $\pi\colon S^n \to P^n$ aplica homeomorficamente cada $n$-simplexo $s$ da triangulação octaédrica de $S^n$ sobre sua imagem $\pi(s)$. $P^n$ é a reunião dessas imagens $\pi(s) = \pi(\alpha(s))$ mas elas não determinam uma triangulação de $P^n$ pois duas quaisquer delas têm os mesmos vértices.

A fim de obter $P^n$ como poliedro, tomamos em $S^n$ a subdivisão baricêntrica da triangulação octaédrica. Agora, os simplexos de $S^n$ são suficientemente pequenos de modo que, se dois deles, digamos $s$ e $s'$, têm interseção não-vazia então $s \cup s'$ não contém pontos antípodas e assim $\pi$ aplica $s \cup s'$ homeomorficamente sobre $\pi(s) \cup \pi(s')$. Por conseguinte, $\pi(s) \cap \pi(s') = \pi(s \cap s')$. Então podemos considerar as imagens $\pi(s)$ dos $n$-simplexos $s \in S^n$ e suas faces $\pi(t)$, $t \subset s$, como os simplexos do poliedro $P^n$, o qual é uma pseudo-variedade, como se vê imediatamente.

Observe-se que, em virtude do Teorema 8, a orientabilidade de uma pseudo-variedade não depende da forma como ela foi triangulada. Se $M$ é uma pseudo-variedade $n$-dimensional orientável, dois $n$-simplexos $\boldsymbol{s}'$ e $\boldsymbol{s}''$ em $M$ dizem-se *igualmente orientados* quando são parcelas da soma $\Gamma = \sum_{s \in M} \boldsymbol{s}$, onde $\partial\Gamma = 0$. Uma vez fixada a orientação $\Gamma$, suas parcelas são os simplexos orientados positivos.

A fim de calcular os grupos de homologia de $P^n$, como faremos a seguir, é preciso saber quando $P^n$ é orientável e quando não é. A resposta é dada pelo

**Teorema 9.** *O espaço projetivo $P^n$ é orientável se, e somente se, $n$ é ímpar.*

**Demonstração:** Quando $n$ é ímpar, atribuimos a $\pi(s)$ em $P^n$ a orientação $\bar{\boldsymbol{s}} = [\pi(a_0), \ldots, \pi(a_n)]$, onde $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_n]$ é a orientação positiva de $s$ em $S^n$. É verdade que se tem também $\pi(s) = \pi(\alpha(s))$, com $\alpha(s) = \langle -a_0, \ldots, -a_n \rangle$ mas, como $n$ é ímpar, sendo $\boldsymbol{s}$ positivo, $\alpha(\boldsymbol{s})$ também é, logo a orientaçao $\bar{\boldsymbol{s}}$ dada a $\pi(s)$, está bem definida. Considerando a cadeia $\overline{\Gamma} = \sum_{\bar{\boldsymbol{s}} \in P^n} \bar{\boldsymbol{s}}$, vemos que $\overline{\Gamma} = \pi(\Gamma)$, onde $\Gamma = \sum_{s \in S^n} \boldsymbol{s}$, logo $\partial\overline{\Gamma} = \partial\pi(\Gamma) = \pi(\partial\Gamma) = 0$. Assim, $H_n(P^n) \neq 0$ e conseqüentemente $P^n$ é orientável.

Se, entretanto, $n$ é par, admitamos por absurdo que $P^n$ seja orientável e tomemos um gerador $\overline{\Gamma} = \sum \bar{\boldsymbol{s}}$ do grupo $H_n(P^n)$. Em cada

$n$-simplexo de $S^n$ fixemos uma orientação $\boldsymbol{s}$ de modo que $\pi(\boldsymbol{s}) = \bar{\boldsymbol{s}}$ seja positivo, isto é, seja uma das parcelas de $\overline{\Gamma}$. Assim orientados, os $n$-simplexos de $S^n$ formam uma cadeia $\Gamma = \sum \bar{\boldsymbol{s}}$, que é um $n$-ciclo pois se $\boldsymbol{s_1}$ e $\boldsymbol{s_2}$ são adjacentes então $\bar{\boldsymbol{s}}_\mathbf{1} = \pi(\boldsymbol{s_1})$ e $\bar{\boldsymbol{s}}_\mathbf{2} = \pi(\boldsymbol{s_2})$ também são, logo induzem orientações opostas na face comum e daí o mesmo ocorre com $\boldsymbol{s_1}$ e $\boldsymbol{s_2}$. Isto nos dá uma contradição pois $\boldsymbol{s}$ e seu antípoda $\alpha(\boldsymbol{s})$ são parcelas de $\Gamma$. □

**Teorema 10.** *Seja $M$ uma pseudo-variedade $n$-dimensional. Se $M$ é orientável então, tomando coeficientes em $\mathbb{Z}$, o grupo $H_{n-1}(M)$ é livre. Por outro lado, se $M$ é não-orientável, $H_{n-1}(M)$ possui um único elemento $\alpha \neq 0$ de ordem finita, com $2 \cdot \alpha = 0$.*

Noutas palavras, se $M$ é não-orientável então $H_{n-1}(M) = F \oplus \mathbb{Z}_2$, onde $F$ é um grupo livre.

**Demonstração:** Evidentemente, os grupos de homologia de um poliedro são finitamente gerados. Assim, para provar que $H_{n-1}(M)$ é livre quando $M$ é orientável, basta mostrar que sua torção é nula. Seja então $y \in C_n(M)$ tal que, para algum $p \geq 0$, tem-se $p \cdot y = \partial x$, com $x \in C_n(M)$. Em cada $n$-simplexo $s \in M$, fixemos uma orientação de modo que a soma $\Gamma = \sum\limits_{s \in M} \boldsymbol{s}$ seja um dos dois ciclos que geram $H_n(M)$. Tomemos ainda uma orientação (arbitrária) $\boldsymbol{t}$ em cada $(n-1)$-simplexo. Então $x = \sum\limits_{s} m_j \cdot \boldsymbol{s}$ e $y = \sum\limits_{t} k_t \cdot \boldsymbol{t}$, um $m_s, k_t \in \mathbb{Z}$. Qualquer par de $n$-simplexos adjacentes $\boldsymbol{s'}$ e $\boldsymbol{s''}$ induz orientações opostas na face comum $t = s' \cap s''$. De $\partial x = p \cdot y$ resulta então que $m_{s'} - m_{s''} = \pm p \cdot k_t$, ou seja, que $m_{s'} = m_{s''}$ (mod.$p$), quando $s'$ e $s''$ são adjacentes. Da condição c) segue-se que os coeficientes $m_s$ são dois a dois côngruos mod.$p$, isto é, existe um número $r$, com $0 \leq r < p$, tal que $m_s = p \cdot q_s + r$ para todo $s$. Então, pondo $x' = \sum q_{s'} \cdot \boldsymbol{s}$ temos

$$x = \sum m_s \cdot \boldsymbol{s} = p \cdot \sum q_s \cdot \boldsymbol{s} + r \cdot \sum \boldsymbol{s} = p \cdot x' + r \cdot \Gamma,$$

logo $p \cdot y = \partial x = p \cdot \partial x'$ (pois $\partial\Gamma = 0$) e daí $y = \partial x'$. Portanto $p[y] = 0$ implica $[y] = 0$ e $H_{n-1}(M)$ não tem torção.

Seja agora $M$ não-orientável. Fixemos orientações arbitrárias em seus $n$-simplexos $s$ e ponhamos $x = \sum \boldsymbol{s}$. Então $\partial x = 2 \cdot a$, onde $0 \neq a = \sum \boldsymbol{t}$ é a soma dos $(n-1)$-simplexos $\boldsymbol{t}$ que herdam a mesma orientação dos dois $n$-simplexos $\boldsymbol{s'}$, $\boldsymbol{s''}$ tais que $s' \cap s'' = t$. A cadeia $a$ é um ciclo pois $2 \cdot \partial a = \partial\partial x = 0$, mas não é homóloga a zero. De fato, se tivéssemos $a = \partial x'$, daí decorreria $\partial x = 2 \cdot \partial x'$, logo $\partial(x - 2x') = 0$ e, como não há $n$-ciclos não-nulos, seria $x = 2x'$, mas esta igualdade é absurda pois os coeficientes de $x$ em termos da base formada pelos $\boldsymbol{s}$ em $C_n(M)$ são todos iguais a 1. Portanto a classe de homologia $[a] \in H_{n-1}(M)$, tal que $2 \cdot [a] = 0$, não é nula.

A classe $[a] \in H_{n-1}(M)$ não depende das orientações escolhidas nos $n$-simplexos de $M$. Com efeito, se tomarmos cadeias $x = \sum \boldsymbol{s}$ e $x' = \sum \boldsymbol{s'}$ formadas tomando essas orientações de duas maneiras diferentes, e pusermos $\partial x = 2 \cdot a$, $\partial x' = 2 \cdot a'$, os $(n-1)$-ciclos $a$ e $a'$ são homólogos.

Para provar isto, basta observar que, como as parcelas de $x'$ diferem das de $x$ apenas por alguns sinais trocados, tem-se $x - x' = 2 \cdot x''$. Então $2 \cdot \partial x'' = 2 \cdot (\partial x - \partial x') = 2 \cdot (a - a')$. Daí $a - a' = \partial x''$ e $[a'] = [a]$.

Mostremos agora que, quando $M$ é não-orientável, a classe $[a]$ acima considerada é o único elemento de ordem finita no grupo abeliano $H_{n-1}(M)$. Suponhamos então que $y$ seja um $(n-1)$-ciclo tal que $p \cdot y = \partial x$ para algum número $p \neq 0$ e uma cadeia $n$-dimensional $x = \sum m_s \cdot \boldsymbol{s}$. Se $y = \sum k_t \cdot \boldsymbol{t}$ então $p \cdot y = \sum p \cdot k_t \cdot \boldsymbol{t}$. Para cada $(n-1)$-simplexo $t$, a relação $p \cdot y = \partial x$ fornece $p \cdot k_t = m_{s'} - m_{s''}$ ou $p \cdot k_t = m_{s'} + m_{s''}$, conforme os simplexos $\boldsymbol{s'}$, $\boldsymbol{s''}$, tais que $t = s \cap s'$, induzam orientações opostas ou a mesma orientação em $t$. Assim, vemos que $m_{s'} = \pm m_{s''}$ (mod.$p$) para $n$-simplexos adjacentes $s'$, $s''$ e, pela condição c), para dois $n$-simplexos quaisquer. Fazendo as trocas de orientação que forem necessárias nos $n$-simplexos, podemos supor

que $x = \sum m_s \cdot \boldsymbol{s}$ é tal que $m_{s'} \equiv m_{s''}$ (mod.$p$) para quaisquer $\boldsymbol{s'}$ e $\boldsymbol{s''}$. Então, como antes, podemos escrever $x = p \cdot x' + r \cdot \gamma$, onde $\gamma = \sum \boldsymbol{s}$ é a soma dos $n$-simplexos de $M$, com as orientações adequadas. Pondo $\partial\gamma = 2 \cdot a$, vem $p \cdot y = \partial x = p \cdot \partial x' + r \cdot \partial\gamma = p \cdot \partial x' + 2 \cdot r \cdot a$, logo $p \cdot (y - \partial x') = 2r \cdot a$.

Como a $(n-1)$-cadeia $a$ é soma de simplexos orientados, todos com coeficiente 1, a igualdade $p \cdot (y - \partial x') = 2r \cdot a$ implica que $2 \cdot r$ é múltiplo de $p$. Então $p \cdot (y - \partial x') = p \cdot q \cdot a$ e $y - \partial x' = q \cdot a$. Daí $[y] = q \cdot [a]$. Como $[a]$ tem ordem 2, concluímos que $q = 0$ ou $q = 1$. Portanto, toda classe de homotopia $[y] \neq 0$ com ordem finita em $H_{n-1}(M)$ concide com $[a]$. □

Calcularemos agora os grupos de homologia $H_r(P^n)$ do espaço projetivo $n$-dimensional, com coeficientes inteiros. Usaremos dois fatos básicos. O primeiro é que $P^n$ pode ser triangulado, como fizemos acima, sob a forma de uma pseudo-variedade $n$-dimensional, orientável quando $n$ é ímpar e não-orientável se $n$ é par. O segundo é que se $U$ é o interior de um simplexo $n$-dimensional em $P^n$ então o poliedro $P^n - U$ tem o subpoliedro $P^{n-1}$ como retrato de deformação. Isto significa que existe uma aplicação contínua $\rho\colon P^n - U \to P^n - U$, homotópica à identidade, cuja imagem é $P^{n-1}$, tal que $\rho(x) = x$ para todo $x \in P^{n-1}$.

Para definir $\rho$, consideraremos o hemisfério norte da triangulação octaédrica de $S^n$ ou, equivalentemente, uma triangulação da bola unitária $B^n$ que, restrita ao bordo $S^{n-1}$, seja simétrica, isto é, junto com cada $(n-1)$-simplexo $s \in S^{n-1}$ contenha também seu simétrico $s^* = \{-x \in S^{n-1}; x \in s\}$. Então, identificando cada ponto $x \in S^{n-1}$ com $-x$, e portanto cada simplexo $s \in S^{n-1}$ com $s^*$, sem qualquer outra identificação em $B^n$, obtemos o espaço projetivo $P^n$, tendo$P^{n-1}$ como subpoliedro.

Dado $U =$ interior de um $n$-simplexo em $B^n$ (portanto em $P^n$), fixamos um ponto $p \in U$ e definimos a retração $\rho_0\colon B^n - U \to B^n - U$ como sendo a projeção radial sobre $S^{n-1}$ a partir de $p$:

para cada $x \in B^n - U$, $\rho_0(x)$ é o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{px}$ corta a esfera $S^{n-1}$. Se pusermos $u = (x-p)/|x-p|$, teremos $\rho_0(x) = -\langle x, u\rangle + \sqrt{\langle x, u\rangle^2 + 1 - |x|^2}$. (Vide [AR3, pag.112.) É claro que $\rho_0$ é linearmente homotópica à identidade, A aplicação $\rho\colon P^n - I \to P^n - U$ procurada é simplesmente $\rho = \pi \circ \rho_0$, onde $\pi\colon S^{n-1} \to P^{n-1}$ é a projeção natural.

**Exemplo 16.** *Grupos de homologia do espaço projetivo.* Já sabemos que, tomando coeficientes inteiros, temos $H_n(P^n) = \mathbb{Z}$ quando $n$ é ímpar e $H_n(P^n) = 0$ se $n$ é par. Seja agora $0 < r < n$. Se $z \in Z_r(P^n)$ é um $r$-ciclo, tomando um qualquer $n$-simplexo $s$, e chamando $U = \text{int.}\, s$, vemos que $z \in Z_r(P^n - U)$. A aplicação $\rho\colon P^n - U \to P^n - U$, acima definida, sendo homotópica à identidade, induz o homomorfismo identidade $\rho_*\colon H_r(P^n - U) \to H_r(P^n - U)$, portanto $[z] = \rho_*[z]$, ou seja, o $r$-ciclo $z$ é homólogo em $P^n - U$ a um ciclo $z'$, situado sobre $P^{n-1} = \rho(P^n - U)$. Iterando o processo, chegamos a um $r$-ciclo $w$ sobre $P^r$, homólogo a $z$ em $P^n - U$ (logo em $P^n$). Se $r$ é par então $w = 0$ pois zero é o único $r$-ciclo em $P^r$. Assim, quando $r$ é par e $0 < r < n$, temos $H_r(P^n) = 0$.

Seja agora $r$ um número ímpar $< n$. Então $w = m \cdot \gamma$ é um múltiplo do ciclo básico $\gamma$, gerador de $H_r(P^r)$. Assim, todo $r$-ciclo $z$ em $P^n$ é homólogo a um múltiplo de $\gamma$, portanto $H_r(P^n)$ é um grupo cíclico, gerado pela classe de homologia de $\gamma$ em $P^n$. Considerando $P^r \subset P^{r+1} \subset P^n$, sabemos que $2\gamma = \partial x$, onde $x$ é uma $(r+1)$-cadeia em $P^{r+1}$. Logo, vendo $\gamma$ como um $r$-ciclo em $P^n$, temos $2[\gamma] = 0$ e assim o grupo cíclico $H_r(P^n)$ é igual a 0 ou a $\mathbb{Z}_2$. Para concluir que $H_r(P^n) = \mathbb{Z}_2$, basta mostrar que $\gamma$ não é bordo de uma $(r+1)$-cadeia em $P^n$. Isto é verdade quando $r = n-1$, pelo Teorema 10. Se for $r < n-1$ então $P^{r+1} \subset P^n - U$ e, analogamente a $\rho$, temos uma retração $\bar{\rho}\colon P^n - U \to P^n - U$, cuja imagem é $P^{r+1}$. Se fosse $[\gamma] = 0$ em $H_r(P^n)$, teríamos $[\gamma] = \bar{\rho}_*[\gamma] = 0$ em $H_r(P^{r+1})$, ou seja, $\gamma$ seria homólogo a zero em $P^{r+1}$ mas já vimos que, pelo Teorema 10, isto não acontece.

Podemos então, em conclusão, enunciar o

**Teorema 11.** *Os grupos de homologia com coeficientes inteiros do espaço projetivo* $P^n$ *são:* $H_n(P^n) = 0$ *se* $n$ *é par e* $H_n(P^n) = \mathbb{Z}$ *se* $n$ *é ímpar. Se* $0 < r < n$ *então* $H_r(P^n) = 0$ *se* $r$ *é par e* $H_r(P^n) = \mathbb{Z}_2$ *se* $r$ *é ímpar.*

**Observação:** Usando coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, tem-se $H_r(P^n) = \mathbb{Z}_2$ para todo $r = 0, 1, \dots, n$.

# 7 O Teorema dos Pontos Fixos de Lefschetz

Nesta seção, os grupos de homologia de um poliedro $K$ serão tomados com coeficientes num corpo. Assim, $H_r(K)$ é um espaço vetorial, cuja dimensão $\beta_r = \beta_r(K)$ é chamada o *número de Betti* de dimensão $r$ de $K$.

Num espaço vetorial de dimensão finita, um operador $T\colon E \to E$ que deixa invariante um subespaço $F \subset E$ induz no espaço quociente um operador $\widetilde{T}\colon E/F \to E/F$, definido por $\widetilde{T}(x + F) = T \cdot x + F$, $x \in E$. Diz-se que $\widetilde{T}$ é obtido de $T$ por *passagem ao quociente*.

Se indicarmos por $\operatorname{tr} \cdot T$ o traço (soma dos elementos da diagonal de uma matriz) de $T$, veremos que, sendo $T|F\colon F \to F$ a restrição de $T$ vale

$$\operatorname{tr} \cdot T = \operatorname{tr} \cdot (T|F) + \operatorname{tr} \cdot \widetilde{T}.$$

Para ver isto, basta usar uma base $\{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ cujos primeiros $m$ elementos formem uma base de $F$, observar que $\{v_{m+1} + F, \dots, v_n + F\}$ é uma base de $E/F$ e olhar para as matrizes de $T$, $T|F$ e $\widetilde{T}$ nestas bases.

Tenha-se em mente que $\operatorname{tr} \cdot T$ é um elemento do corpo dos coeficientes.

A *característica de Euler* do poliedro $K$ é a soma alternada $\chi(K) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,\alpha_r$, onde $\alpha_r$ é o número de simplexos de dimensão $r$ e $n$ é a dimensão de $K$.

Este importante número inteiro foi introduzido por Euler em 1758 sob a forma $\chi(K) = V - A + F$, onde $V$ é o número de vértices, $A$ é o número de arestas e $F$ é o número de faces de um poliedro homeomorfo à esfera $S^2$. Euler percebeu que, neste caso, tem-se sempre $\chi(K) = 2$. Bem mais tarde, em 1893, Poincaré mostrou que, considerando homologia com coeficientes inteiros, $\chi(K) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,\beta_r$ é igual à soma alternada dos números de Betti de $K$, portanto é um invariante topológico (e mesmo do tipo de homotopia) de $K$.

Seja $f\colon K \to K$ uma aplicação contínua do poliedro $K$ em si mesmo. Indicaremos com $f_r\colon C_r(K) \to C_r(K)$ o morfismo (operador linear) induzido nas cadeias $r$-dimensionais por alguma aproximação simplicial que fixaremos arbitrariamente. A notação $f_{r*}: H_r(K) \to H_r(K)$ significará o homomorfismo induzido por $f_r$ (ou, equivalentemente, por $f$) em $H_r(K)$, o qual não depende da escolha da aproximação simplicial.

Se dim. $K = n$, o *número de Lefschetz* de $f$ é, por definição:

$$L(f) = \operatorname{tr}.(f_{0*}) - \operatorname{tr}.(f_{1*}) + \cdots + (-1)^n \operatorname{tr}.(f_{n*}) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \operatorname{tr}.(f_{r*}).$$

Na verdade, $L(f)$ pertence ao corpo dos coeficientes da homologia. Se, por exemplo, tomarmos o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais, então $L(f)$ será um verdadeiro número, e mesmo um número inteiro, como veremos logo a seguir.

Quando $f\colon K \to K$ é homotópica à identidade, $f_{r*}$ é, para todo $r$, o operador identidade, portanto seu traço é igual à dimensão de $H_r(K)$ vezes o elemento unidade do corpo. Se o corpo tem característica zero, podemos identificar esse elemento unidade com

o número 1 e então afirmar que $\operatorname{tr}.(f_{r*}) = \beta_r$. Assim, se o corpo dos coeficientes tem característica zero e $f$ é homotópica à identidade então $L(f) = \chi(K)$.

**Lema de Hopf.** $\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r \operatorname{tr}.(f_{r*}) = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r \operatorname{tr}.(f_r)$.

**Demonstração:** Lembrando que $H_r(K) = Z_r/B_r$, vemos que o homomorfismo $f_{r*}$ é obtido de $f_r|Z_r\colon Z_r \to Z_r$ por passagem ao quociente, logo $\operatorname{tr}.(f_r|Z_r) = \operatorname{tr}.(f_r|B_r) + \operatorname{tr}.(f_{r*})$. Analogamente, $\tilde{f}_r\colon C_r/Z_r \to C_r/Z_r$ é obtido de $f_r\colon C_r \to C_r$ por passagem ao quociente, logo $\operatorname{tr}.(f_r) = \operatorname{tr}.(f_r|Z_r) + \operatorname{tr}.(\tilde{f}_r)$. (Estamos escrevendo $C_r = C_r(K)$, $Z_r = Z_r(K)$ e $B_r = B_r(K)$.) Ora, o homomorfismo bordo $\partial\colon C_r \to B_{r-1}$ induz um isomorfismo $\bar{\partial}\colon C_r/Z_r \to B_{r-1}$ o qual, como $f_{r-1} \circ \partial = \partial \circ f_r$, torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_r/Z_r & \xrightarrow{\tilde{f}_r} & C_r/Z_r \\ {\scriptstyle\bar{\partial}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\partial}} \\ B_{r-1} & \xrightarrow{f_{r-1}|B_{r-1}} & B_{r-1} \end{array}$$

Portanto $\operatorname{tr}.(\tilde{f}_r) = \operatorname{tr}.(f_{r-1}|B_{r-1})$. Daí $\operatorname{tr}.(f_r) = \operatorname{tr}.(f_r|Z_r) + \operatorname{tr}.(f_{r-1}|B_{r-1})$. Escrevendo $\operatorname{tr}.(f_{-1}|B_{-1}) = 0 = \operatorname{tr}.(f_n|B_n)$, temos

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \operatorname{tr}.(f_{r-1}|B_{r-1}) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r[-\operatorname{tr}.(f_r|B_r)].$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \operatorname{tr}.f_r &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \cdot [\operatorname{tr}.(f_r|Z_r) + \operatorname{tr}.(f_{r-1}|B_{r-1})] \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \cdot [(f_r|Z_r) - \operatorname{tr}.(f_r|B_r)] \\ &= \sum(-1)^r \cdot \operatorname{tr}.(f_{r*}). \qquad \square \end{aligned}$$

**Corolário do Lema.** *Se o corpo dos coeficientes tem característica zero então* $\chi(K) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \beta_r$ .

Por conseguinte, a característica de Euler de um poliedro não depende de sua triangulação. Ou seja: poliedros homeomorfos têm a mesma característica de Euler.

**Teorema 12** (Lefschetz). *Seja* $f\colon K \to K$ *uma aplicação contínua. Se* $L(f) \neq 0$ *então* $f$ *admite pelo menos um ponto fixo.*

**Demonstração:** Por absurdo, suponhamos que $f$ não possua pontos fixos. Então existe $c > 0$ tal que $|x - f(x)| \geq c$ para todo $x \in K$. Como a homologia de $K$ não depende da triangulação, podemos supor que todos os seus simplexos têm diâmetro $< c/2$. Seja $\varphi\colon K^{(m)} \to K$ uma aproximação simplicial de $f$. Para todo $x \in K^{(m)}$, os pontos $f(x)$ e $\varphi(x)$ pertencem ao mesmo simplexo de $K$, logo $|x - \varphi(x)| \geq |x - f(x)| - |f(x) - \varphi(x)| \geq c - c/2 = c/2$. Assim, se $s$ é um simplexo em $K^{(m)}$ e $x \in s$, o ponto $\varphi(x)$ não pertence a $s$. Noutras palavras, $s \cap \varphi(s) = \varnothing$ para todo $s$ em $K^{(m)}$. O morfismo $f_r\colon C_r(K) \to C_r(K)$ é definido como $f_r = \varphi \circ Sd^m$ logo, para todo $\boldsymbol{s} \in C_r(K)$, sua imagem $f_r(\boldsymbol{s})$ é uma combinação linear de simplexos do tipo $\varphi(\boldsymbol{t})$, com $t \subset s$, portanto todos eles disjuntos de $s$. Assim, na cadeia $f_r(\boldsymbol{s}) \in C_r(K)$, escrita como combinação linear dos elementos da base de $C_r(K)$ formada pelos $r$-simplexos de $K$, o coeficiente de $\boldsymbol{s}$ é zero. Isto significa que a matriz de $f_r$ nesta base tem todos os elementos da diagonal nulos, logo $\operatorname{tr}.(f_r) = 0$. Segue-se do Lema de Hopf que $L(f) = 0$, uma contradição. □

**Exemplo 17.** Se o poliedro $K$ é acíclico (em particular, contrátil) então toda aplicação contínua $f\colon K \to K$ tem pontos fixos. Isto nos dá o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, pois a bola $B^n$ é contrátil. ◁

**Exemplo 18.** Seja $f\colon S^n \to S^n$ contínua, com grau $d$, ou seja, $f_*([z]) = d \cdot [z]$ para toda classe $[z] \in H_n(S^n)$. Então $L(f) =$

“main2”
2009/6/19
page 133

$1 + (-1)^n d$. Assim, quando $n$ é par, toda aplicação contínua $f\colon S^n \to S^n$ de grau $\neq -1$ tem pontos fixos e, se $n$ é ímpar, têm necessariamente pontos fixos as aplicações de grau $\neq 1$. Isto permite à aplicação antípoda $S^n \to S^n$ não ter ponto fixo. ◁

**Exemplo 19.** Consideremos uma aplicação contínua $f\colon P^n \to P^n$, do espaço projetivo $n$-dimensional $P^n$ em si mesmo. Tomando coeficientes no corpo $\mathbb{Z}_2$, temos $\dim H_r(P^n) = 1$ para todo $r$ com $0 \leq r \leq n$, logo $L(f) = 0$ ou $L(f) = 1$, conforme seja par ou ímpar o número de valores de $r$ para os quais o operador linear $f_*\colon H_r(P^n) \to H_r(P^n)$ é diferente de zero (portanto igual à identidade). Se, entretanto, tomarmos coeficientes no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, teremos dois casos possíveis. Se $n$ for par então $H_r(P^n) = 0$ para todo $r > 0$. (Não há torção: se uma cadeia $x$ é tal que $p \cdot x = \partial y$ então $x = \partial\big(\frac{1}{p} \cdot y\big)$. Logo, aqueles grupos $H_r(P^n)$ que eram $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes inteiros passam a ser nulos com coeficientes racionais.) Então $L(f) = 1$. Assim, quando $n$ é par, toda aplicação contínua $f\colon P^n \to P^n$ tem pontos fixos. Se $n$ é ímpar, a homologia de $P^n$ com coeficientes racionais é $H_r(P^n) = 0$ se $0 < r < n$ e $H_r(P^n) = \mathbb{Q}$ se $r = 0$ ou $r = n$. Então $L(f) = 1 - d$ onde $d$ é o grau de $f$. Vemos assim que, para $n$ ímpar, $d \neq 1$ assegura a existência de pontos fixos de $f$. Como a aplicação antípoda não tem ponto fixo, isto mostra outra vez que, quando $n$ é ímpar, seu grau é 1. ◁

**Observações:** 1. Como todo grupo abeliano finitamente gerado, o grupo de homologia $H_r(K)$ com coeficientes inteiros se escreve, de modo único, como soma direta $H_r(K) = F \oplus T$ onde $F$ é um grupo livre e $T$ é um grupo finito no qual, naturalmente, todos os elementos têm torção. É claro que, se usarmos coeficientes racionais, todas as classes de homologia pertencentes a $T$ anulam-se pois $p \cdot [z] = 0$ implica $[z] = \frac{1}{p} \cdot p[z] = 0$ caso $p \neq 0$. Mais ainda: tomando coeficientes racionais, a dimensão do espaço vetorial $H_r(K)$ coincide

com o posto (número de geradores livres) de $T$. Para concluir isto, basta ver que toda relação $\sum m_i \cdot [z_i] = 0$ com coeficientes racionais implica na relação $\sum q\, m_i[z_i] = 0$ com coeficientes inteiros se tomarmos $q =$ m.m.c. dos denominadores dos $m_i$. (O resto do argumento são detalhes.) Segue-se que $\beta_r(K) =$ posto da parte livre de $H_r(K)$, com coeficientes inteiros. Assim, por exemplo, $\chi(S^n) = 0$ se $n$ é ímpar e $\chi(S^n) = 2$ se $n$ é par.

2. O Teorema 12 implica num resultado básico de Topologia Diferencial e de Sistemas Dinâmicos: se uma superfície compacta $M$ tem característica de Euler diferente de zero então todo campo contínuo de vetores tangentes a $M$ possui ao menos uma singularidade (isto é, em algum ponto de $M$ o campo se anula). Com efeito, supondo o contrário, teríamos um campo $v$ de vetores tangentes a $M$, o qual podemos supor diferenciável, com $v(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Definimos então uma aplicação $f\colon M \to M$, sem pontos fixos, homotópica à identidade, fixando um número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e pondo, para cada $x \in M$, $f(x) =$ ponto obtido deslocando $x$ ao longo da órbita que se origina em $x$, por um tempo $\varepsilon$.

3. O significado do número $L(f)$, conforme concebido originalmente por Lefschetz é o seguinte: se $K$ é uma superfície triangulada, a cada ponto fixo isolado $a$ da aplicação contínua $f\colon K \to K$ associa-se um *índice*, que é o grau local da aplicação $x \mapsto f(x) - x$ (em termos de uma parametrização de uma vizinhança de $a$), aplicação essa que tem $a$ como zero isolado. Lefschetz provou que toda $f\colon K \to K$ pode ser aproximada por (logo é homotópica a) uma aplicação cujos pontos fixos são todos isolados e que a soma dos índices é igual a $L(f)$.

Por exemplo, se $f\colon S^2 \to S^2$ é dada por $f(z) = z^2$, seus pontos fixos são 0, 1 e $\infty$. Considerando $\varphi(z) = z^2 - z$, temos $\varphi'(z) = 2z - 1$, logo os graus locais são iguais a 1. A soma dos graus locais é 3, o que coincide com o número de Lefschetz $L(f) = 10 + 2 = 3$.

# 8 Homologia ordenada

Um *r-simplexo ordenado* num poliedro $K$ é uma seqüência $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$ cujos termos $a_i$ são vértices (não necessariamente distintos) de um mesmo simplexo de $K$.

Os elementos do $A$-módulo livre $c_r(K)$, gerado pelos $r$-simplexos de $K$, são chamados as *r-cadeias ordenadas* de $K$ com coeficientes em $A$. Cada uma destas é uma combinação linear $x = \sum x_{(s)} \cdot (s)$, onde $x_{(s)} \in A$ para cada $r$-simplexo ordenado $(s)$. Os homomorfismos $\partial \colon c_r(K) \to c_{r-1}(K)$, definidos por

$$\partial(s) = \sum (-1)^i \, (a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r) \quad \text{se} \quad (s) = (a_0, \ldots, a_r),$$

cumprem a condição $\partial\partial = 0$, logo a seqüência

$$\mathfrak{c}(K)\colon\ \cdots \to c_r(K) \to c_{r-1}(K) \to \cdots \to c_0(K)$$

é um complexo de cadeias, cujos grupos de homologia serão denotados por $h_r(K)$ e chamado os *grupos de homologia ordenada* de $K$, em contraposição aos grupos de homologia orientada $H_r(K)$ que vínhamos considerando até agora.

Para provar que $\partial\partial = 0$, indiquemos com $\partial_i(s) = (a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r)$ a $i$-ésima face do simplexo ordenado $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$. Temos $\partial_j\partial_i(s) = \partial_{i-1}\partial_j(s)$ se $0 \le j < i$ e $\partial_j\partial_i(s) = \partial_i\partial_{j+1}(s)$ quando $0 \le i \le j$. Por conseguinte, para todo $r$-simplexo ordenado $(s)$ vale:

$$\begin{aligned}\partial\partial(s) &= \partial\left(\sum_i (-1)^i \, \partial_i(s)\right) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \, \partial_j\partial_i(s) \\ &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \, \partial_j\partial_i(s) + \sum_{i \le j} (-1)^{i+j} \, \partial_i\partial_{j+1}(s).\end{aligned}$$

Substituindo, no segundo somatório, $i$ por $j$ e $j+1$ por $i$ temos:

$$\partial\partial(s) = \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \, \partial_j\partial_i(s) + \sum_{j<i} (-1)^{i+j-1} \, \partial_j\partial_i(s) = 0.$$

Uma aplicação simplicial $f\colon K \to L$ induz um morfismo $f\colon \mathfrak{c}(K) \to \mathfrak{c}(L)$, indicado com o mesmo símbolo $f$ e definido, em cada dimensão $r$, pelo homomorfismo $f_r\colon c_r(K) \to c_r(L)$, dado pelas igualdades $f_r(a_0, \ldots, a_r) = (f(a_0), \ldots, f(a_r))$, onde $(a_0, \ldots, a_r) = (s)$ é um simplexo ordenado de $K$. A condição $\partial \circ f_r = f_{r-1} \circ \partial$ é facilmente verificada. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $f\colon c_r(K) \to c_r(L)$ em vez de $f_r$. Tem-se então os homomorfismos $f_*\colon h_r(K) \to h_r(L)$, induzidos em homologia ordenada, com $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ se $g\colon L \to M$ é também simplicial.

Vamos mostrar que $h_r(K)$ é isomorfo a $H_r(K)$ para todo $r \geq 0$. Há um morfismo natural $\varphi\colon \mathfrak{c}(K) \to \mathcal{C}(K)$, definido pondo-se $\varphi(a_0, \ldots, a_r) = [a_0, \ldots, a_r]$ para todo $r$-simplexo $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$. (Lembremos que $[a_0, \ldots, a_r] = 0$ se a seqüência $(s)$ tem termos repetidos.) Conforme vimos no final da Seção 2, vale $\sum(-1)^i\,[a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r] = 0$ se o simplexo $[a_0, \ldots, a_r]$ é degenerado. Aquele mesmo argumento mostra que $\sum(-1)^i \cdot (a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_r) = 0$ se a seqüência $(a_0, \ldots, a_r)$ tem repetições. Segue-se daí que $\varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi$, logo $\varphi\colon \mathfrak{c}(K) \to \mathcal{C}(K)$ é um morfismo.

Afirmamos que o homomorfismo induzido $\varphi_*\colon h_r(K) \to H_r(K)$ é, para todo $r \geq 0$, um isomorfismo. Para provar isto, definimos um morfismo $\psi\colon \mathcal{C}(K) \to \mathfrak{c}(K)$ tal que $\psi_* \circ \varphi_* = \mathrm{id}\colon h_r(K) \to h_r(K)$ e $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}\colon H_r(K) \to H_r(K)$. Para obter $\psi$, usaremos uma relação de ordem entre os vértices de $K$, que fixaremos agora (de modo um tanto arbitrário), em relação à qual os vértices de um mesmo simplexo estão linearmente ordenados. (Uma tal relação de ordem chama-se *admissível*.) Em seguida tomamos a base de $C_r(K)$ formada pelos $r$-simplexos orientados $\boldsymbol{s} = [a_0, \ldots, a_r]$ tais que $a_0 < a_1 < \cdots < a_r$ na ordem que adotamos. Então pomos $\psi(\boldsymbol{s}) = (a_0, \ldots, a_r)$ e isto determina homomorfismos $\psi\colon C_r(K) \to c_r(K)$, para $r \geq 0$, sendo claro que $\psi \circ \partial = \partial \circ \psi$.

Temos $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}\colon C_r(K) \to C_r(K)$, logo $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}\colon H_r(K) \to H_r(K)$. Além disso $\psi \circ \varphi\colon c_r(K) \to c_r(K)$ é transportado pela

identidade (vista como transporte acíclico), logo $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = \mathrm{id}\colon h_r(K) \to h_r(K)$, como queríamos demonstrar. (Aqui, estamos usando o Teorema 5 para cadeias ordenadas, mas é claro que ele também vale neste caso, com a mesma demonstração.)

Embora não se preste tão bem para calcular a homologia em exemplos elementares, a homologia ordenada possui uma flexibilidade que a torna útil em situações de natureza geral, como veremos adiante.

# 9 Cohomologia simplicial

Conforme as definições gerais do Capítulo I, as $r$-cocadeias (orientadas) de um poliedro $K$, com coeficientes no anel $A$, são os homomorfismos $u\colon C_r(K) \to A$. Elas constituem o $A$-módulo $C^r(K)$ ou, quando convier ser mais específico, $C^r(K; A)$. Estes módulos compõem o complexo

$$\mathcal{C}^*(K) = \mathcal{C}^*(K;A)\colon C^0(K) \xrightarrow{\delta} C^1(K) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} C^{n-1}(K) \xrightarrow{\delta} C^n(K),$$

onde $n$ é a dimensão de $K$ e $\delta\colon C^r(K) \to C^{r+1}(K)$ é o homomorfismo adjunto de $\partial\colon C_{r+1}(K) \to C_r$ , isto é, $(\delta u)(x) = u(\partial x)$ para toda cadeia $x \in C_{r+1}(K)$ e toda cocadeia $u \in C^r(K)$.

Como toda cadeia $x \in C_r(K)$ se escreve, de modo único, sob a forma $x = \sum x_s \cdot \boldsymbol{s}$, com $x_s \in A$, a fim de definir um homomorfismo $u\colon C_r(K) \to A$ basta atribuir arbitrariamente o valor $u(\boldsymbol{s}) \in A$ para cada $r$-simplexo orientado $\boldsymbol{s}$, exigindo apenas que se tenha $u(-\boldsymbol{s}) = -u(\boldsymbol{s})$. Portanto, podemos considerar as $r$-cocadeias $u \in C^r(K)$ simplesmente como funções definidas nesses simplexos, com valores em $A$, tais que $u(-\boldsymbol{s}) = -u(\boldsymbol{s})$. Uma base natural de $r$-cocadeias, dual da base formada por $r$-simplexos orientados, é o conjunto das cocadeias $\boldsymbol{s}^*$ tais que $\boldsymbol{s}^*(\boldsymbol{s}) = 1$, $\boldsymbol{s}^*(-\boldsymbol{s}) = -1$ e $\boldsymbol{s}^*(\boldsymbol{t}) = 0$ se $t \neq s$. Segue-se das definições de $\partial$ e $\delta$ que $\delta \boldsymbol{s}^* = \sum \boldsymbol{t}$, soma estendida aos $(r+1)$-simplexos orientados $\boldsymbol{t}$ dos quais $\boldsymbol{s}$ é uma face (com as

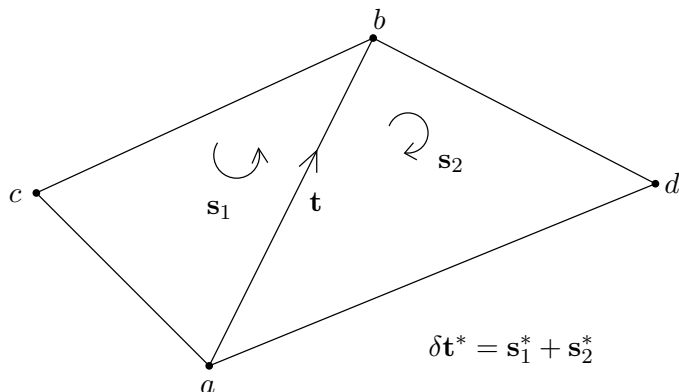



**Figura 24.**

orientações induzidas). Esta observação nos permite olhar para os elementos de $C^r(K)$ como cadeias orientadas munidas do operador de cobordo $\delta$ em vez do operador de bordo $\partial$.

**Exemplo 20.** Numa pseudo-variedade de dimensão 2, se $\boldsymbol{t} = [a, b]$ é um 1-simplexo orientado, com $t = s_1 \cap s_2$ onde $\boldsymbol{s}_1 = [c, a, b]$ e $\boldsymbol{s}_2 = [d, a, b]$ então $\delta\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{s}_1^* + \boldsymbol{s}_2^*$. $\triangleleft$

Esta interpretação geométrica de $C^r(K)$ e $\delta$ é conveniente nos exemplos e na visão intuitiva da cohomologia simplicial, porém, em argumentos de natureza geral e nas demonstrações, a definição inicial $C^r(K) = \mathrm{Hom}(C_r(K), A)$ é bem superior.

Podemos também considerar o $A$-módulo $c^r(K)$ das cocadeias ordenadas, cada uma das quais é um homomorfismo $u\colon c_r(K) \to A$. Estes módulos compõem o complexo $\mathfrak{c}^*(K)$ no qual o cobordo $\delta\colon c^r(K) \to c^{r+1}(K)$ é definido como o homomorfismo adjunto do bordo $\partial\colon c_{r+1}(K) \to c_r(K)$, isto é, $(\delta u)(x) = u(\partial x)$ para toda $x \in c_{r+1}(K)$. Novamente, como $c_r(K)$ é livre, tendo como base o conjunto dos $r$-simplexos ordenados $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$, podemos olhar para uma $r$-cocadeia ordenada como uma função arbitrária $u$, definida nos $r$-simplexos ordenados de $K$, com valores em $A$, e

$\delta u \in c^{r+1}(K)$ como a função dada por

$$(\delta u)(s) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i u(a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_{r+1}) \ se \ (s) = (a_0, \ldots, a_{r+1}).$$

Então $C^r(K)$ pode ser considerado como o submódulo de $c^r(K)$ formado pelas *r-cocadeias anti-simétricas* $u$, isto é, tais que

$$u(a_{\sigma(0)}, \ldots, a_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma \cdot u(a_0, \ldots, a_r)$$

para todo simplexo ordenado $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$ e toda permutação $\sigma$ de $\{0, 1, \ldots, r\}$. Esta igualdade assegura que $u(s) = 0$ se o simplexo $(s)$ é degenerado, e que $u(-\boldsymbol{s}) = -u(\boldsymbol{s})$.

A aplicação de inclusão $i \colon C^r(K) \to c^r(K)$ induz o isomorfismo $i^* \colon H^r(K) \to h^r(K)$ entre as cohomologias orientada e ordenada de $K$.

Com efeito, vimos há pouco que os morfismos $\varphi \colon c_r(K) \to C_r(K)$ e $\psi \colon C_r(K) \to c_r(K)$, definidos na Seção 8, são tais que $\psi \circ \varphi$ e $\varphi \circ \psi$ são algebricamente homotópicos às aplicações identidades correspondentes, logo induzem isomorfismos $\varphi_* \colon h_r(K) \to H_r(K)$ e $\psi_* \colon H_r(K) \to h_r(K)$, inversos um do outro. Tomando os homomorfismos adjuntos $\varphi^\top \colon C^r(K) \to c^r(K)$, $\varphi^\top \colon c^r(K) \to C^r(K)$, bem como os adjuntos das homotopias algébricas consideradas, vemos que $\varphi^\top$ e $\psi^\top$ induzem isomorfismos (um inverso do outro) entre os grupos de cohomologia $H^r(K)$ e $h^r(K)$. Assim, todo cociclo ordenado é cohomólogo a um cociclo anti-simétrico.

É útil observar que se os cociclos $u, v \in c^r(K)$ coincidem nos simplexos $(s) = (a_0, \ldots, a_r)$ cujos vértices estão ordenados crescentemente em relação a uma ordem admissível então $u$ e $v$ são cohomólogos (em $c^r(K)$). Com efeito,

$$[u] = \varphi^* \psi^* [u] = \varphi^* [\psi^\top (u)] = \varphi^* [\psi^\top (v)] = \varphi^* \psi^* [v] = [v].$$

Conforme mencionamos anteriormente, a correspondência $K \mapsto H_r(K)$ é um *functor* covariante da categoria dos poliedros na categoria dos $A$-módulos, isto significando que a cada aplicação contínua

$f\colon K \to L$ entre poliedros corresponde um homomorfismo $f_*\colon H_r(K) \to H_r(L)$ de $A$-módulos, de tal modo que se $f\colon K \to K$ é a aplicação identidade então $f_*\colon H_r(K) \to H_r(K)$ é o homomorfismo identidade e, se $g\colon L \to P$ é outra aplicação contínua entre poliedros, tem-se $f_* \circ g_* = (g \circ f)_*\colon H_r(K) \to H_r(P)$.

Analogamente, a correspondência $K \mapsto H^r(K)$ é um functor, só que desta vez *contravariante*: a cada aplicação contínua $f\colon K \to L$ corresponde um homomorfismo $f^*\colon H^r(L) \to H^r(K)$ de tal modo que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^r(P) \to H^r(K)$ se $g\colon L \to P$ é outra aplicação contínua entre poliedros; além disso $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}\colon H^r(K) \to H^r(K)$. Isto se comprova simplesmente chamando de $f^*\colon H^r(K) \to H^r(K)$ o homomorfismo induzido pelo adjunto $f^\top\colon C^r(L) \to C^r(L)$ do morfismo $f\colon C_r(K) \to C_r(L)$ definido a partir de uma aproximação simplicial de $f$, como na Seção 5.

**Teorema 13.** *Seja $M$ uma pseudo-variedade $n$-dimensional. O grupo de cohomologia $H^n(M)$, com coeficientes inteiros, é cíclico infinito (portanto isomorfo a $\mathbb{Z}$) se $M$ é orientável e é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ se $M$ é não-orientável.*

**Demonstração:** Suponhamos inicialmente que $M$ seja orientável e fixemos o ciclo $\Gamma = \sum \boldsymbol{s}$, gerador de $H_n(M)$, ou seja, adotemos uma orientação em $M$. Como não há simplexos de dimensão $n+1$, toda $n$-cocadeia é um cociclo. Em particular, se $\boldsymbol{s}$ é qualquer $n$-simplexo orientado, $\boldsymbol{s}^*$ é um cociclo. Afirmamos que nenhum múltiplo $p \cdot \boldsymbol{s}^*$, com $p \neq 0$, é um cobordo. De fato, $p \cdot \boldsymbol{s}^* = \delta u$ implicaria

$$p = p \cdot \boldsymbol{s}^*(s) = p \cdot \boldsymbol{s}^*(\Gamma) = \delta u(\Gamma) = u(\partial\Gamma) = u(0) = 0.$$

Mostremos agora que a classe de cohomologia $[\boldsymbol{s}^*]$ gera $H^n(M)$ que é, portanto, cíclico infinito. Com efeito, se $\boldsymbol{s_1}$ e $\boldsymbol{s_2}$ são $n$-simplexos adjacentes, positivamente orientados, com $s_1 \cap s_2 = t$ então, tomando em $t$ a orientação induzida por $\boldsymbol{s_1}$, temos $\delta \boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{s_1^*} - \boldsymbol{s_2^*}$, logo $[\boldsymbol{s_1^*}] = [\boldsymbol{s_2^*}]$. Segue-se então da condição c) da definição de

pseudo-variedade que $[\boldsymbol{s_1^*}] = [\boldsymbol{s_2^*}]$, sejam quais forem os $n$-simplexos positivamente orientados $\boldsymbol{s_1}$ e $\boldsymbol{s_2}$. Como $H^n(M)$ é gerado pelas classes de cohomologia $[\boldsymbol{s^*}]$, concluímos que este grupo é cíclico infinito.

Caso $M$ seja não-orientável, mostraremos que, dado qualquer $n$-simplexos orientado $\boldsymbol{s}$, $H^n(M)$ é gerado pela classe de cohomologia $[\boldsymbol{s^*}]$, que é $\neq 0$ e cumpre $2 \cdot [\boldsymbol{s^*}] = 0$.

Com efeito, seja $(\boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_k})$ um circuito desorientador em $M$ com $\boldsymbol{s_1} = \boldsymbol{s}$. Lembrando que $\boldsymbol{s_k} = -\boldsymbol{s_1}$, atribuamos a cada face comum $t_i = s_i \cap s_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ a orientação $\boldsymbol{t_i}$ nela induzida por $\boldsymbol{s_i}$ e formemos a cocadeia $u = \boldsymbol{t}_1^* + \cdots + \boldsymbol{t}_{k-1}^*$. Temos $\delta \boldsymbol{t}_i^* = \boldsymbol{s}_i^* - \boldsymbol{s}_{i+1}^*$ para $i = 1, \ldots, k-2$ e $\delta \boldsymbol{t}_{k-1}^* = \boldsymbol{s}_{k-1}^* - \boldsymbol{s}_k^* = \boldsymbol{s}_{k-1}^* + \boldsymbol{s}_1^*$. Portanto $\delta u = \boldsymbol{s}_1^* - \boldsymbol{s}_2^* + \boldsymbol{s}_2^* - \boldsymbol{s}_3^* + \cdots + \boldsymbol{s}_k^* = 2\boldsymbol{s}_1^*$. Assim, $2[\boldsymbol{s}^*] = 0$. Como as classes da cohomologia do tipo $[\boldsymbol{s}^*]$ geram $H^n(M)$, concluímos que $2\alpha = 0$ para toda $\alpha \in H^n(M)$. A cocadeia $\boldsymbol{s^*}$ não é cohomóloga a zero. Isto se vê quando se observa que, se chamarmos de *par* a uma $n$-cocadeia $\sum k_s \boldsymbol{s^*}$ tal que a soma $\sum k_s$ dos coeficientes é um número par, então o cobordo da cocadeia $\boldsymbol{t}^*$, associada ao $(n-1)$-simplexo $t = s_1 \cap s_2$ é a cocadeia par $\boldsymbol{\delta t^*} = \pm(\boldsymbol{s_1^*} - \boldsymbol{s_2^*})$ e daí o cobordo de qualquer $(n-1)$-cocadeia é par. Como $\boldsymbol{s^*}$ não é par, tem-se $[\boldsymbol{s^*}] \neq 0$. Para completar a prova de que $H^n(M) = \mathbb{Z}_2$, basta ver que se $s_1$ e $s_2$ são $n$-simplexos adjacentes, com $s_1 \cap s_2 = t$, então $\delta \boldsymbol{t^*} = \pm \boldsymbol{s_1^*} \pm \boldsymbol{s_2^*}$ logo $[\boldsymbol{s_1^*}] = [\boldsymbol{s_2^*}]$ pois $\alpha = -\alpha$ para todo $\alpha \in H^n(M)$. Segue-se da condição c) da definição de pseudo-variedade que $[\boldsymbol{s}_1^*] = [\boldsymbol{s}_2^*]$ para quaisquer dois $n$-simplexos em $M$, portanto $H^n(M) = \mathbb{Z}_2$. □

**Exemplo 21.** A Figura 25 representa o esquema simplicial de uma triangulação da garrafa de Klein. É um quadrado, decomposto em 18 triângulos. Como no caso do toro, cada aresta do bordo é identificada com uma aresta do lado oposto, só que agora, imaginando

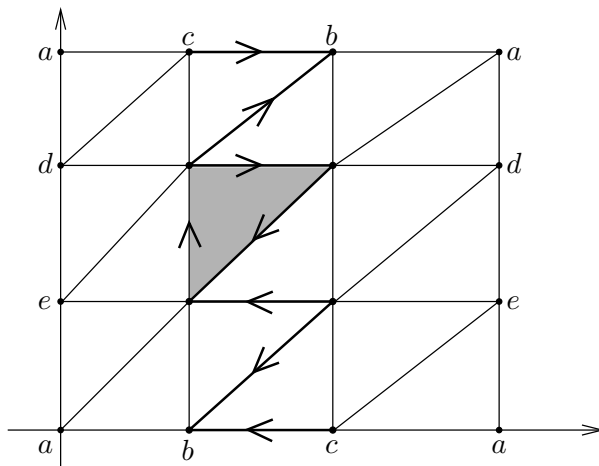



**Figura 25.**

o quadrado como $[0,1]\times[0,1]$ em $\mathbb{R}^2$, cada ponto $(0,y)$ é identificado com $(1,y)$ mas cada ponto $(x,0)$ é identificado com $(1-x,1)$. Assim, a colagem dos dois lados verticais é a mesma do toro mas nos lados horizontais do bordo, faz-se uma inversão do sentido antes de colar. A linha em ziguezague acentuada na figura é uma 1-cocadeia cujo cobordo é $2\boldsymbol{s}^*$, onde $\boldsymbol{s}$ é o triângulo hachurado. ◁

**Exemplo 22.** *Cohomologia de dimensão zero.* Ao contrário da homologia, nem toda cocadeia 0-dimensional é um cociclo. Por exemplo, se $a$ é um vértice do poliedro $K$ e $a^*$ é sua cocadeia dual, temos $\delta a^*{=}\sum \boldsymbol{s}_i^*$ , soma estendida a todos os 1-simplexos $\boldsymbol{s}_i{=}[b_i,a]$ em $K$ que têm $a$ como um dos seus vértices. A Figura 26 exibe o cobordo $\delta a^*$, onde $a$ é um vértice do toro $T^2$.

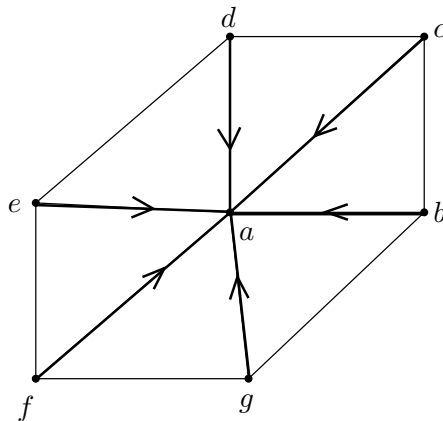
Como não há cocadeias de dimensão $-1$, temos $H^0(K) = Z^0$ (cociclos de dimensão zero). Se $a_1,\dots,a_p$ são os vértices do poliedro $K$ e, para cada $i = 1,\dots,p$, $a_i^*$ é a 0-cocadeia igual a 1 no vértice $a_i$ e zero nos demais vértices então $u = a_1^* + \cdots + a_p^*$ é uma 0-cocadeia que assume o valor 1 em cada vértice de $K$, logo é um cociclo pois, para toda 1-cocadeia $x = \sum\limits_s a_s \cdot \boldsymbol{s}$ com $\boldsymbol{s} = [a_s, b_s]$ temos

$$\delta a^* = [b,a]^* + [c,a]^* + [d,a]^* + [e,a]^* + [f,a]^* + [g,a]^*$$

**Figura 26.**

$(\delta u)x = u(\delta x) = \sum x_s\big(u(b_s) - u(a_s)\big) = 0$. Se $\boldsymbol{s} = [a,b]$ é um 1-simplexo e $v \in Z^0$ é um 0-cociclo então $0 = \delta v(\boldsymbol{s}) = v(\partial \boldsymbol{s}) = v(b) - v(a)$, logo $v(b) = v(a)$. Se $K$ é conexo, segue-se que todo 0-cociclo é constante nos vértices de $K$, portanto é um múltiplo de $u$. Concluímos que se $K$ é um poliedro conexo então $H^0(K) = A =$ anel dos coeficientes. Se $K = K_1 \cup \cdots \cup K_p$ é a reunião de $p$ componentes conexas, é claro que $H^r(K)$ é a soma direta $H^r(K_1) \oplus \cdots \oplus H^r(K_p)$ e isto vale, em particular, quando $r = 0$. $\triangleleft$

**Exemplo 23.** *Cohomologia do toro* $T^2$. Novamente consideraremos a triangulação do toro bidimensional $T^2$ que o representa como o poliedro descrito no Exemplo 4. Como se trata de uma pseudo-variedade orientável, temos $H^0(T^2) = A = H^2(T^2)$, onde $A$ é o anel dos coeficientes. Vamos mostrar que $H^1(T^2) = A \oplus A$ é um $A$-módulo livre com dois geradores $[u]$ e $[v]$, onde os cociclos $u$ e $v$ estão indicados na Figura 27.

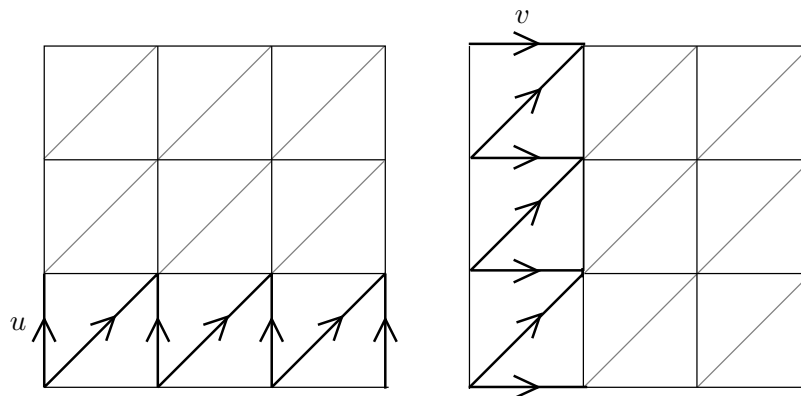



**Figura 27**. Os cociclos $u$ e $v$ cujas classes de cohomologia geram $H^1(T^2)$.

Lembremos que $H_1(T^2)$ é um $A$-módulo livre, gerado pelas classes de homologia $[a]$ e $[b]$, onde $a$ é a soma dos segmentos horizontais do bordo do quadrado, orientados da esquerda para a direita, e $b$ é a soma dos segmentos verticais do bordo, orientados de baixo para cima. (Vide Exemplo 11.) As classes de cohomologia $[u]$ e $]v]$ são linearmente independentes pois se tivéssemos $\alpha \cdot [u] + \beta \cdot [v] = 0$, com $\alpha, \beta \in A$, ou seja, $\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \delta w$, $w \in C^0(T^2)$, daí resultaria $\alpha = (\alpha u + \beta v)(a) = \delta w(a) = w(\partial a) = w(0) = 0$ e, analogamente, $\beta = 0$. Resta mostrar que $[u]$ e $[v]$ geram $H^1(T^2)$. Ora, dado qualquer cociclo $w \in Z^1$, tomando $\alpha = w(a)$ e $\beta = w(b)$, afirmamos que $[w] = \alpha \cdot [u] + \beta \cdot [v]$, ou seja, que $\overline{w} = w - \alpha \cdot u - \beta \cdot v$ é um cobordo. É claro que $\overline{w}(a) = \overline{w}(b) = 0$. Como todo 1-ciclo é da forma $z = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \partial x$, com $x \in C_2(T^2)$, segue-se que $\overline{w}(z) = 0$ para todo 1-ciclo $z$. Resta apenas mostrar que, num poliedro conexo $K$, uma 1-cocadeia $\overline{w}$ que se anula em todo 1-ciclo é um cobordo. Para achar uma 0-cocadeia $c$ tal que $\delta c = \overline{w}$, notemos que esta condição já defina $c$ no submódulo $B_0(K)$ pondo $c(\partial x) = \overline{w}(x)$. Não há ambigüidade, pois $\partial x = \partial x' \Rightarrow \partial(x - x') = 0 \Rightarrow \overline{w}(x - x') = 0 \Rightarrow \overline{w}(x) = \overline{w}(x')$. Em seguida, estendemos o homomorfismo $c\colon B_0(K) \to A$ a todo o módulo $C_0(K)$ fixando um vértice $a \in K$, notando que toda cadeia $y \in C_0(K)$ se escreve, de

modo único, como soma $y = (\text{In } y) \cdot a + (y - (\text{In } y) \cdot a)$ de um múltiplo de $a$ com a cadeia $y - (\text{In } y) \cdot a$, que tem índice zero, logo pertence a $B_0(K)$ conforme o Exemplo 6. Ou seja, $y = (\text{In } y) \cdot a + \partial x$, $x \in C_1(K)$. Pomos então $c(y) = c(\partial x) = \overline{w}(x)$ e temos $\overline{w} = \delta c$.

**Observação.** Admitindo que $A$ é um anel principal, $B_0(K)$ é livre, como submódulo do módulo livre $C_0(K)$ e então podemos omitir o argumento final da demonstração, invocando o Teorema 2 do Capítulo I.

# 10 O anel de cohomologia

Vamos introduzir uma aplicação bilinear $H^q(K) \times H^r(K) \to H^{q+r}(K)$, ou seja, uma multiplicação, que torna a soma direta $H^*(K) = \bigoplus_r H^r(K)$ um anel, chamado o *anel de cohomologia do poliedro $K$*.

Inicialmente, definimos o produto $u \cdot v$ de duas cadeias ordenadas $u \in c^q(K)$, $v \in c^r(K)$ como a $(q + r)$-cocadeia tal que

$$(u \cdot v)(a_0, \ldots, a_{q+r}) = u(a_0, \ldots, a_q) \cdot v(a_q, \ldots, a_{q+r})$$

para todo $(q + r)$-simplexo ordenado $(s) = (a_0, \ldots, a_{q+r})$ em $K$. A aplicação bilinear $c^q(K) \times c^r(K) \to c^{q+r}(K)$ que esta multiplicação define torna a soma direta $c^*(K) = \bigoplus_r c^r(K)$ um anel, no qual se tem

$$\delta(u \cdot v) = \delta u \cdot v + (-1)^q \, u \cdot \delta v \text{ se } u \in c^q(K) \text{ e } v \in c^r(K),$$

como se verifica sem dificuldade. Segue-se daí que o produto de dois cociclos é um cociclo e o produto de um cobordo por qualquer cocadeia é ainda um cobordo, logo $z^*(K) = \bigoplus_r z^r(K)$ é um subanel de $c^*(K)$, no qual $b^*(K) = \bigoplus_r b^r(K)$ é um ideal bilateral e assim

$h^*(K) = \bigoplus_r h^r(K) = \bigoplus_r (z^r(K))\big/b^r(K)$ é um anel no qual o produto de $[u] \in h^q(K)$ por $[v] \in h^r(K)$ é $[u]\cdot[v] = [u \cdot v] \in h^{q+r}(K)$.

Em relação à multiplicação acima definida em $c^*(K)$, o submódulo $C^*(K) = \bigoplus_r C^r(K)$ das cocadeias anti-simétricas não é um subanel de $c^*(K)$. Além disso, embora seja verdade que $[v]\cdot[u] = (-1)^{qr}\,[u]\cdot[v]$ quando $[u] \in h^q(K)$ e $[v] \in h^r(K)$, isto não é óbvio a partir da definição dada. Para remediar a situação, passamos a definir o produto de cocadeias anti-simétricas.

Com este fim, introduzimos uma ordem admissível entre os vértices de $K$. (Logo em seguida, veremos que, no nível de cohomologia, a ordem escolhida é irrelevante.)

Usando essa relação de ordem, definimos o produto das cocadeias anti-simétricas $u \in C^q(K)$, $v \in C^r(K)$ como a cocadeia anti-simétrica $u \cup v \in C^{q+r}(K)$ tal que

$$(u \cup v)(a_0, \ldots, a_{q+r}) = u(a_0, \ldots, a_q) \cdot v(a_q, \ldots, a_{q+r})$$

se o simplexo $(s) = (a_0, \ldots, a_{q+r})$ tem seus vértices $a_0 < \cdots < a_{q+r}$ em ordem crescente. (Se $(s)$ é degenerado, tem-se $(u \cup v)(s) = 0$ e se $(s) = (a_{\sigma(0)}, \ldots, a_{\sigma(q+r)})$ com $a_0 < \cdots < a_{q+r}$ então $(u \cup v)(s) = \varepsilon_\sigma \cdot (u \cup v)(a_0, \ldots, a_{q+r})$.

Com esta definição, $C^r(K) = \bigoplus_r C^r(K)$ é um subanel de $c^*(K)$ e $\delta(u \cup v) = (\delta u) \cup v + (-1)^q\, u \cup \delta v$ se $u \in C^q(K)$ e $v \in C^r(K)$. Daí resulta que os cociclos formam um subanel $Z^*(K) = \bigoplus_r Z^r(K)$ no qual os cobordos constituem um ideal bilateral $B^*(K) = \bigoplus_r B^r(K)$, portanto a multiplicação $H^q(K) \times H^r(K) \to H^{q+r}(K)$, dada por $[u] \cup [v] = [u \cup v]$, está bem definida.

Se $u \in C^q(K)$ e $v \in C^r(K)$ são cadeias anti-simétricas, elas são, em particular, cocadeias ordenadas, logo têm sentido os produtos $u \cdot v$ e $u \cup v$ em $c^{q+r}$. Estes produtos são, em geral, diferentes porém se $u$ e $v$ são cociclos tem-se $[u \cdot v] = [u \cup v]$, ou seja $[u]\cdot[v] = [u] \cup [v]$.

Com efeito, os cociclos $u \cdot v$ e $u \cup v$ coincidem nos simplexos $(a_0, \ldots, a_{q+r})$ tais que $a_0 < \cdots < a_{q+r}$ e, como vimos na Seção 9, isto assegura que $[u \cdot v] = [u \cup v]$.

A igualdade $[u]\cdot[v] = [u]\cup[v]$ quando $[u] \in H^q(K)$ e $[v] \in H^r(K)$ mostra que o produto $[u] \cup [v]$ não depende da ordem admissível usada para defini-lo.

Provaremos a seguir que esta multiplicação faz de $H^*(K) = \bigoplus_r H^r(K)$ um anel graduado anti-comutativo, isto é, que se tem

$$[u] \cup [v] = (-1)^{qr}\, [v] \cup [u] \text{ se } [u] \in H^q(K) \text{ e } [v] \in H^r(K).$$

A fim de facilitar as manipulações, para todo $q \in \mathbb{N}$, escrevamos $\widehat{q} = 1 + 2 + \cdots + q = q(q+1)/2$. Notemos que $\widehat{q} + \widehat{r} + \widehat{q+r} \equiv qr(\text{mod } 2)$. Com efeito, as expressões $\widehat{q} = q(q+1)/2$, $\widehat{r} = r(r+1)/2$ e $\widehat{q+r} = (q+r)(q+r+1)/2)$ nos dão imediatamente $\widehat{q}+\widehat{r}+\widehat{q+r} = 2\widehat{q} + 2\widehat{r} + qr \equiv qr(\text{mod } 2)$.

Observemos ainda que, escolhida uma ordem admissível em $K$, a partir dela podemos definir o produto $u \cup v$ de cocadeias e, usando a ordem inversa, o produto $u \vee v$. Como a multiplicação em cohomologia não depende da ordem escolhida, se $u$ e $v$ são cociclos tem-se $[u] \cup [b] = [u] \vee [v]$.

Dadas as cocadeias $u \in C^q(K)$, $v \in C^r(K)$, se os vértices do simplexo $(a_0, \ldots, a_{q+r})$ estão em ordem crescente, temos:

$$\begin{aligned}
(u \cup v)(a_0, \ldots, a_{q+r}) &= u(a_0, \ldots, a_q) \cdot v(a_q, \ldots, a_{q+r}) \\
&= (-1)^{\widehat{q}} \cdot u(a_q, \ldots, a_0) \cdot (-1)^{\widehat{r}} \cdot v(a_{q+r}, \ldots, a_q) \\
&= (-1)^{\widehat{q}+\widehat{r}}\, v(a_{q+r}, \ldots, a_q) \cdot u(a_q, \ldots, a_0) \\
&= (-1)^{\widehat{q}+\widehat{r}+\widehat{q+r}}\, (v \cup u)(a_{q+r}, \ldots, a_0) \\
&= (-1)^{qr}\, (v \vee u)(a_0, \ldots, a_r).
\end{aligned}$$

Se $u$ e $v$ são cociclos, concluímos que

$$[u] \cup [v] = (-1)^{qr}\, [v] \vee [u] = (-1)^{qr}\, [v] \cup [u].$$

**Exemplo 24.** Em qualquer poliedro conexo, a multiplicação $H^0(K) \times H^r(K) \to H^r(K)$ é simplesmente $(\alpha \cdot [u]) \mapsto \alpha \cdot [u]$, $\alpha \in A$. Na esfera $S^n$, o produto $[u] \cup [v]$ é zero se $\dim[u] > 0$ e $\dim[v] > 0$. Um exemplo não-trivial é dado pelo toro $T^2$. A fim de determinar a multiplicação $H^1(T^2) \times H^1(T^2) \to H^2(T^2)$, a única não-trivial, é suficiente calcular o produto $[v] \cup [u]$, onde $[v]$ e $[u]$ são os geradores livres de $H^1(T^2)$ mencionados no Exemplo 23, pois $[u] \cup [u] = [v] \cup [v] = 0$ pela anti-simetria do produto.

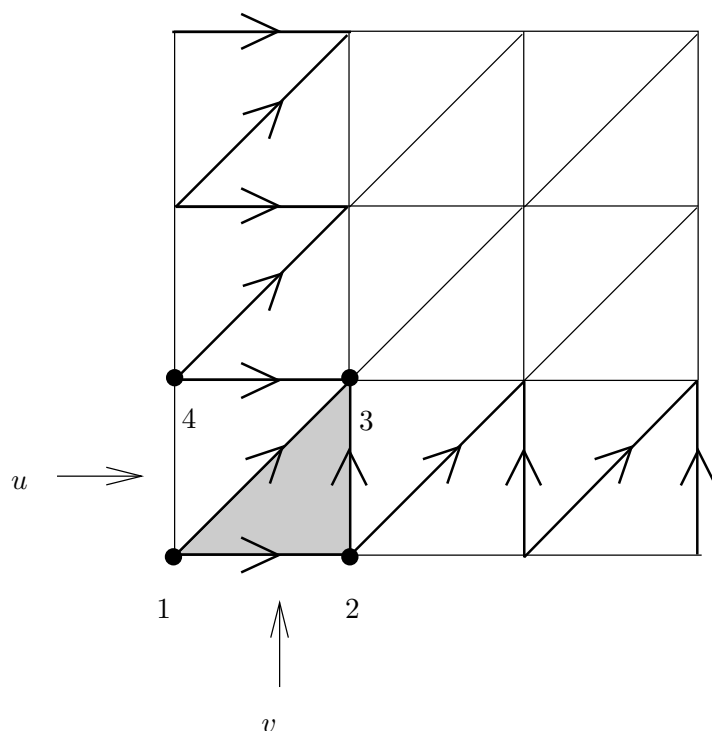



**Figura 28**. Esta figura contém as cocadeias $u$ e $v$ da figura 27. Vê-se que $u \cup v$ é a cocadeia $[1, 2, 3]^*$.

Escrevendo a cocadeia $u$ como soma de parcelas do tipo $[a, b]^*$ e $v$ como soma de parcelas $[x, y]^*$, vemos que todos os produtos $[x, y]^* \cup [a, b]^*$ são nulos, exceto $w = [1, 2]^* \cup [2, 3]^*$ pois, diretamente a partir da definição, $w([1, 2, 3]) = [1, 2]^*([1, 2]) \cdot [2, 3]^*([2, 3]) = 1$. Assim $v \cup u = w$. Como $w(s) = 0$ para todos os 2-simplexos de $T^2$

diferentes de $[1,2,3]$, temos $w = [1,2,3]^*$. (Na definição do produto $v \cup u$ estamos utilizando qualquer relação de ordem admissível na qual $1 < 2 < 3$.) Portanto $[v] \cup [u]$ é a classe de cohomologia de um gerador de $H^2(T^2)$.

Uma aplicação simplicial $f\colon K \to L$ entre os poliedros $K$ e $L$ induz, como sabemos, para cada $r = 0, 1, \ldots,$ um homomorfismo $f\colon c_r(K) \to c_r(L)$, cujo adjunto $f^\top\colon c^r(L) \to c^r(K)$ satisfaz, além da condição $f^\top(\delta u) = \delta f^\top(u)$ para toda $u \in c^r(L)$, a igualdade $f^\top(u \cdot v) = f^\top(u) \cdot f^\top(v)$. Portanto os homomorfismos induzidos $f^*\colon H^r(L) \to H^r(K)$, definidos por $f^*([u]) = [f^\top(u)]$, cumprem a condição $f^*([u] \cup [v]) = f^*([u]) = f^*([v])$, ou seja, são homomorfismos de anel.

Usando aproximação simplicial, vemos que toda aplicação contínua $f\colon K \to L$ induz homomorfismos de anel $f^*\colon H^r(L) \to H^r(K)$. Como $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e $(\mathrm{id}_K)^* = \mathrm{id}_{H^r(K)}$ , concluímos que poliedros homeomorfos têm anéis de cohomologia isomorfos.

O exemplo seguinte exibe dois poliedros cujos módulos de cohomologia são isomorfos mas os anéis não são.

**Exemplo 25.** É praxe em Topologia escrever $X \vee Y$ para representar a reunião dos espaços topológicos $X$ e $Y$ que têm um ponto em comum. Com esta notação vemos que o poliedro $K = S^2 \vee S^1 \vee S^1$ tem os mesmos grupos de homologia e de cohomologia que o toro $T^2$ porém a multiplicação na cohomologia de $K$ é trivial, o que não ocorre em $T^2$. Noutras palavras, os grupos de cohomologia de $K$ e $T^2$ são isomorfos mas os anéis não.

# Capítulo IV

# Homologia Singular

Diferentemente da cohomologia de deRham, que é definida apenas para superfícies diferenciáveis, e da homologia simplicial, que só se aplica a espaços homeomorfos a poliedros, a homologia singular tem sentido para todos os espaços topológicos, ou seja, sua abrangência é a maior possível. Além disso, suas definições básicas são as mais simples e sua invariância topológica é imediata. Em compensação, em muitos casos concretos ela perde no significado intuitivo e na calculabilidade.

## 1 Primeiras definições

Indicaremos com $\Delta_r$ o simplexo $r$-dimensional cujos vértices $e_0$, $e_1, \ldots, e_r$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^{r+1}$. Assim,

$$\Delta_r = \{(t_0, \ldots, t_r);\, t_i \geq 0,\, \sum_{i=0}^{r} t_i = 1\}.$$

Um $r$-*simplexo singular* no espaço topológico $X$ é uma aplicação contínua $\sigma\colon \Delta_r \to X$.

Seja $S_r(X)$ o $A$-módulo livre gerado pelos $r$-simplexos singulares de $X$. Os elementos de $S_r(X)$, chamados as $r$-*cadeias sin-*

*gulares* de $X$ com coeficientes no anel $A$, são portanto as combinações lineares finitas $x = \sum_{\sigma} x_\sigma \cdot \sigma$ de $r$-simplexos singulares $\sigma$, onde $x_\sigma \in A$. Quando houver necessidade, escreveremos $S_r(X;A)$ em vez de $S_r(X)$.

Para $i = 0, 1, \ldots, r$, a *$i$-ésima face* dos $r$-simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$ é o $(r-1)$-simplexo $\partial_i\sigma\colon \Delta_{r-1} \to X$, definido por

$$\partial_i\sigma(t_0, \ldots, t_{r-1}) = \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_r).$$

O *operador bordo* $\partial\colon S_r(X) \to S_{r-1}(X)$ é o homomorfismo definido por $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, \partial_i\sigma$ para todo $r$-simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$.

Com o mesmo argumento usado para cadeias simpliciais ordenadas, mostra-se que $\partial \circ \partial = 0$, de modo que a seqüência

$$\mathcal{S}(X)\colon \cdots \to S_r(X) \xrightarrow{\partial} S_{r-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X)$$

é um complexo de cadeias, chamado o *complexo singular* do espaço $X$. Os grupos de homologia $H_r(X)$ desse complexo são chamados os *grupos de homologia singular* de $X$.

Uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ induz, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo $f\colon S_r(X) \to S_r(Y)$, indicado com o mesmo símbolo $f$ e definido por $f(\sigma) = f \circ \sigma\colon \Delta_r \to Y$ para todo $r$-simplexo singular $\sigma\colon \Delta_r \to X$. É imediato que $\partial f(\sigma) = f(\partial\sigma)$, portanto fica definido um morfismo $f\colon \mathcal{S}(K) \to \mathcal{S}(Y)$, e daí, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo $f_*\colon H_r(X) \to H_r(Y)$, chamado o *homomorfismo induzido* por $f$. Tem-se $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon H_r(X) \to H_r(Z)$ se $g\colon Y \to Z$ é outra aplicação contínua, e a aplicação identidade $X \to X$ induz o homomorfismo identidade $H_r(X) \to H_r(X)$. Portanto, quando $f\colon X \to Y$ é um homeomorfismo, $f_*\colon H_r(X) \to H_r(Y)$ é um isomorfismo.

Se $Y \subset X$ é um subespaço, os $A$-módulos $S_r(Y)$, com o operador bordo $\partial\colon S_r(Y) \to S_{r-1}(Y)$, formam um subcomplexo $\mathcal{S}(Y) \subset \mathcal{S}(X)$ e os grupos de homologia do complexo quociente, formado

pelos $A$-módulos $S_r(X)\big/S_r(Y)$ com o operador $\overline{\partial}\colon S_r(X)\big/S_r(Y) \to S_{r-1}(X)\big/S_{r-1}(Y)$, são indicados por $H_r(X,Y)$ e chamados os *grupos de homologia relativa* de $X$ mod $Y$.

Se $Y \subset X$ e $Y' \subset X'$, uma aplicação contínua $f\colon X \to X'$ tal que $f(Y) \subset Y'$ chama-se uma *aplicação contínua do par* $(X,Y)$ *no par* $(X',Y')$ e escreve-se $f\colon (X,Y) \to (X',Y')$. Então o morfismo $f\colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X')$ é tal que $f(\mathcal{S}(Y)) \subset \mathcal{S}(Y')$ e, por passagem ao quociente, fica bem definido o morfismo $f\colon \mathcal{S}(X)\big/\mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}(X')\big/\mathcal{S}(Y')$, donde o homomorfismo induzido $f_*\colon H_r(X,Y) \to H_r(X',Y')$ para cada $r \geq 0$.

As seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow S_r(Y) \xrightarrow{\ i\ } S_r(X) \xrightarrow{\ j\ } S_r(X)\big/S_r(Y) \longrightarrow 0$$

dão origem à seqüência exata de homologia singular do par $(X,Y)$:

$$\cdots \longrightarrow H_r(Y) \xrightarrow{\ i_*\ } H_r(X) \xrightarrow{\ j_*\ } H_r(X,Y) \xrightarrow{\ \partial_*\ } H_{r-1}(Y) \longrightarrow \cdots$$

**Exemplo 1.** *Homologia de dimensão zero.* Um 0-simplexo no espaço topológico $X$ é simplesmente um ponto $p \in X$. Como não há simplexos de dimensão $-1$, tem-se $\partial p = 0$. Assim, toda 0-cadeia é um ciclo. Como no Exemplo 6 do Capítulo III, definimos um homomorfismo $\text{In}\colon S_0(X) \to A$ estipulando que $\text{In}(p) = 1$ para todo $p \in X$, logo $\text{In}(x) = \sum\limits_p x_p$ se $x = \sum\limits_p x_p \cdot p$. Quando a 0-cadeia $x = \sum\limits_p x_p \cdot p$ é um bordo, digamos $x = \partial y$, com $y = \sum\limits_\sigma y_\sigma \cdot \sigma$, cada $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ (onde $\Delta_1 = \langle e_0, e_1\rangle$) é um caminho em $X$, com $\sigma(e_0) = p_\sigma$ e $\sigma(e_1) = q_\sigma$, logo $\partial\sigma = q_\sigma - p_\sigma$ e $\text{In}(x) = \text{In}(\partial y) = \text{In}\big(\sum\limits_\sigma y_\sigma \cdot \partial\sigma\big) = \text{In}\big(\sum\limits_\sigma y_\sigma \cdot (q_\sigma - p_\sigma)\big) = \sum\limits_\sigma y_\sigma \cdot \text{In}(q_\sigma - p_\sigma) = 0$. Portanto o índice $\text{In}(x)$ de todo 0-bordo é zero. No caso em que $X$ é conexo por caminhos, vale a recíproca: se $\text{In}(x) = 0$ então a 0-cadeia $x = \sum\limits_{i=1}^k x_i \cdot p_i$ é da forma $x = \partial y$ com $y \in S_1(X)$. De fato, fixando um ponto $a \in X$, tomamos caminhos $\sigma_1, \dots, \sigma_k\colon \Delta_1 \to X$ tais que

$\sigma_i(e_0) = a$ e $\sigma_i(e_1) = p_i$ e, formando a 1-cadeia $y = \sum_{i=1}^{k} x_i\sigma_i$, temos $\partial y = \sum x_i p_i - \big(\sum x_i\big)a = x$. Portanto o núcleo do homomorfismo In: $S_0(X) \to A$ é $B_0(X)$. Equivalentemente: duas 0-cadeias em $X$ são homólogas se, e somente se, têm o mesmo índice. Como $S_0(X) = Z_0(X)$, concluímos que In induz um isomorfismo $H_0(X) \approx A$ quando $X$ é conexo por caminhos. O caso de um espaço $X$ qualquer se reduz a este se notarmos que, para todo $r \geq 0$, vale $H_r(X) = \bigoplus_{\lambda\in L} H_r(X_\lambda)$, onde $(X_\lambda)_{\lambda\in L}$ é a família das componentes conexas por caminhos do espaço $X$. ▷

**Exemplo 2.** *A homologia singular de um ponto.* Quando o espaço topológico $X$ se reduz a um único ponto $p$, todo $r$-simplexo é constante, igual a $p$, logo $S_r(X) = A \cdot p$ para todo $r \geq 0$. Além disso, como $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i$ é igual a zero quando $r$ é ímpar e igual a 1 quando $r$ é par, vemos que o operador bordo $\partial\colon S_r(X) \to S_{r-1}(X)$ é nulo para todo $r$ ímpar e igual à identidade se $r > 0$ é par. Então, quando $X = \{p\}$ consta de um só ponto, o complexo singular de $X$ é

$$\cdots \longrightarrow A_{2k} \xrightarrow{\text{id}} A_{2k-1} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{\text{id}} A_1 \xrightarrow{0} A_0 \longrightarrow 0,$$

onde $A_r = A$ para todo $r \geq 0$. Segue-se que $H_r(X) = 0$ se $r > 0$ e $H_0(X) = A$. ▷

## 2 Invariância homotópica

Seja $H\colon X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre as aplicações contínuas $f, g\colon X \to Y$. Assim, $H$ é contínua, com $H_0 = f$ e $H_1 = g$, onde, para todo $t \in [0,1]$, $H_t\colon X \to Y$ é definida por $H_t(x) = H(x,t)$. Neste caso, provaremos que $f_* = g_*\colon H_r(X) \to H_r(Y)$ para todo $r \geq 0$.

Com este objetivo, estabeleceremos uma série de notações.

Para cada $t \in [0,1]$, $i_t \colon \Delta_r \to \Delta_r \times [0,1]$ é a aplicação contínua dada por $i_t(y) = (y,t)$. Assim, $f = H \circ i_0$ e $g = H \circ i_1$.

Se $\sigma \colon \Delta_r \to X$ é um $r$-simplexo, $\tilde{\sigma} \colon \Delta_r \times [0,1] \to X \times [0,1]$ é a aplicação contínua definida por $\tilde{\sigma}(y,t) = (\sigma(y),t)$.

$P_i \colon \Delta_{r+1} \to \Delta_r \times [0,1]$, com $0 \le i \le r+1$, é a aplicação afim caracterizada por $P_i(e_j) = (e_j, 0)$ se $j \le i$ e $P_i(e_j) = (e_{j-1}, 1)$ se $j > i$. (Aqui, $0 \le j \le r$.)

Para todo $r$-simplexo $\sigma \colon \Delta_r \to X$ e todo $i = 0,1,\ldots,r+1$, $\tilde{\sigma} \circ P_i \colon \Delta_{r+1} \to X \times [0,1]$ é um $(r+1)$-simplexo. Então definimos o homomorfismo $D \colon S_r(X) \to S_{r+1}(X \times [0,1])$ pondo, para cada $\sigma \colon \Delta_r \to X$,

$$D\,\sigma = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i\, \tilde{\sigma} \circ P_i\,.$$

Verifica-se que $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \tilde{\sigma} \circ i_1 - \tilde{\sigma} \circ i_0$. Portanto, se indicarmos ainda com $H \colon \mathcal{S}(X \times [0,1]) \to \mathcal{S}(Y)$ o morfismo determinado por $H$ nas cadeias e pusermos $\overline{D} = H \circ D$, veremos que

$$\partial\overline{D}\sigma + \overline{D}\partial\sigma = H(\tilde{\sigma} \circ i_1) - H(\tilde{\sigma} \circ i_1) = g(\sigma) - f(\sigma),$$

logo $\overline{D}$ é uma homotopia algébrica entre os morfismos $f, g \colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$. Conseqüentemente $f_* = g_* \colon H_r(X) \to H_r(Y)$ para todo $r \ge 0$.

Segue-se que dois espaços topológicos com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia singular isomorfos em todas as dimensões. Em particular, se $X$ é contrátil então $H_r(X) = 0$ para todo $r > 0$.

A fim de fornecer exemplos de grupos de homologia singular, vamos necessitar de instrumentos como a seqüência de Mayer-Vietoris. Tentando estabelecê-la, tomamos abertos $U$, $V$ tais que $X = U \cup V$. Considerando os homomorfismos $i \colon S_r(U \cap V) \to S_r(U) \oplus S_r(V)$ e $j \colon S_r(U) \oplus S_r(V) \to S_r(X)$. dados por $i(x) = (x,x)$ e $j(x,y) = x - y$, vemos que a seqüência curta

$$0 \longrightarrow S_r(U \cap V) \xrightarrow{\ i\ } S_r(U) \oplus S_r(V) \xrightarrow{\ j\ } S_r(X) \longrightarrow 0$$

não é exata, apenas porque o homomorfismo $j$ não é sobrejetivo: embora se tenha $X = U \cup V$, não é verdade que toda cadeia em $S_r(X)$ seja soma de uma cadeia em $U$ com uma cadeia em $V$. A fim de superar esta dificuldade, vamos mostrar, na seção seguinte, que a homologia singular do espaço $X = U \cup V$ pode ser calculada com base em simplexos cujas imagens estão contidas num dos dois conjuntos $U$ ou $V$.

# 3 Subdivisão baricêntrica em homologia singular

Um *simplexo afim* no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação afim $\ell\colon \Delta_q \to \mathbb{R}^n$. Como $\ell$ fica determinada pelas imagens $a_0 = \ell(e_0), \ldots, a_q = \ell(e_q)$, escrevemos $\ell = \langle a_0, \ldots, a_q \rangle$.

Um *$q$-subsimplexo* do simplexo singular $\sigma\colon \Delta_r \to X$ é um simplexo do tipo $\sigma \circ \ell\colon \Delta_q \to X$, onde $\ell\colon \Delta_q \to \Delta_r$ é afim. Tem-se $\partial(\sigma \circ \ell) = \sigma \circ \partial\ell$.

Indicamos com $S_q(\sigma)$ o submódulo de $S_r(X)$ gerado pelos $q$-subsimplexos de $\sigma\colon \Delta_r \to X$. Temos $\partial S_q(\sigma) \subset S_{q-1}(\sigma)$, o que nos dá um subcomplexo $\mathcal{S}(\sigma) = (S_q(\sigma), \partial)$ do complexo singular $\mathcal{S}(X) = (S_r(X), \partial)$.

Para todo $r$-simplexo singular $\sigma\colon \Delta_r \to X$, vamos definir o *operador cone* $K = K_\sigma\colon S_q(\sigma) \to S_{q+1}(\sigma)$. Se $\ell = \langle a_0, \ldots, a_q \rangle$ é um simplexo afim em $\Delta_r$, chamamos de $b$ o baricentro de $\Delta_r$ e pomos $K\ell = \langle b, a_0, \ldots, a_r \rangle$. Tem-se

$$\partial K\ell + K\partial\ell = \ell \text{ se } \dim \ell > 0 \text{ e } \partial K\ell + K\partial\ell = \ell - \langle b \rangle \text{ se } \dim \ell = 0.$$

Resulta daí que para toda $q$-cadeia afim $x = \sum x_i \ell_i$ vale

$$\partial Kx + K\partial x = x \text{ se } q > 0 \text{ e } \partial Kx + K\partial x = x - \operatorname{In} x \cdot b \text{ se } q = 0,$$

onde $\operatorname{In} x = \sum x_i$ é o índice da 0-cadeia afim $x$.

Em seguida, dados $\sigma\colon \Delta_r \to X$ e $\ell\colon \Delta_q \to \Delta_r$ afins, pomos $K(\sigma \circ \ell) = \sigma \circ K\ell$. Fica assim completada a definição do *operador cone* $K\colon \mathcal{S}(\sigma) \to \mathcal{S}(\sigma)$ tal que $K(S_q(\sigma)) \subset S_{q+1}(\sigma)$.

Para toda $q$-cadeia $x = \sum x_i \cdot (\sigma \circ \ell_i)$ em $\mathcal{S}(\sigma)$ vale (com $K = K_\sigma$):

$$\partial Kx + K\partial x = x \text{ se } q > 0 \text{ e } \partial Kx + K\partial x = x - \operatorname{In} x \cdot \sigma(b) \text{ se } q = 0.$$

Segue-se imediatamente que o subcomplexo $\mathcal{S}(\sigma) \subset \mathcal{S}(X)$ é acíclico, isto é, seus grupos de homologia são zero em todas as dimensões positivas e igual a $A$ na dimensão zero.

O homomorfismo de *subdivisão baricêntrica* $\beta\colon S_r(X) \to S_r(X)$ é definido indutivamente, de modo a cumprir as seguintes condições:

0) $\beta(S_r(\sigma)) \subset S_r(\sigma)$;
1) $\beta(x) = x$ se $x \in S_0(X)$;
2) $\beta(\sigma) = K_\sigma\, \beta(\partial\sigma)$ se $\sigma\colon \Delta_r \to X$ com $r > 0$.

**Teorema 1.** a) *$\beta(\partial\sigma) = \partial\beta(\sigma)$ para todo simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$, logo $\beta\colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ é um morfismo.*

b) *Para todo $r \geq 0$ existe um homomorfismo $D\colon S_r(X) \to S_{r+1}(X)$ tal que $D\partial\sigma + \partial D\sigma = \sigma - \beta(\sigma)$ seja qual for o $r$-simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$.*

**Demonstração:** A afirmação a) é clara quando $r = 0$. Supondo-a verdadeira para $r - 1$, com $r > 0$, seja $\sigma\colon \Delta_r \to X$. Então $\partial\beta(\sigma) = \partial K_\sigma\beta(\partial\sigma) = \beta(\partial\sigma) - K_\sigma\partial\beta(\partial\sigma) = \beta(\partial\sigma) - K_\sigma\beta(\partial\partial\sigma) = \beta(\partial\sigma)$.

Para provar b), definiremos $D$ indutivamente, com as seguintes propriedades:

0) $D(\mathcal{S}(\sigma)) \subset \mathcal{S}(\sigma)$ para todo simplexo singular $\sigma$;
1) $D\sigma = 0$ se $\dim\sigma = 0$;
2) $\partial Dx + \partial Dx = x - \beta(x)$ para todo $x \in S_q(X)$, $) < q < r$.

Supondo $D$ definido em $S_{r-1}(X)$, considere o $r$-simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$, com $r > 0$. A cadeia $z = \sigma - \beta(\sigma) - D\partial\sigma$ cumpre

$$\partial z = \partial\sigma - \beta(\partial\sigma) - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \beta(\partial\sigma) - \partial\sigma + \beta(\partial\sigma) + D\partial\partial\sigma = 0.$$

Portanto $z$ é um ciclo em $\mathcal{S}(\sigma)$. Como $\mathcal{S}(X)$ é acíclico, podemos escolher uma cadeia $(r+1)$-dimensional $D\sigma \in \mathcal{S}(\sigma)$ tal que $\partial D\sigma = z$ e daí $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \beta(\sigma)$. Com isto, fica definido o homomorfismo $D$. $\square$

A condição b) acima significa que o morfismo $\beta\colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ induz o isomorfismo identidade $\beta_*\colon H_r(X) \to H_r(X)$ nos grupos de homologia $H_r(X)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ .

Seja $\alpha$ uma cobertura de $X$ por conjuntos cujos interiores ainda cobrem $X$ (em particular, uma cobertura aberta de $X$). Diremos que um simplexo singular $\sigma\colon \Delta_r \to X$ é *$\alpha$-pequeno* quando sua imagem $\sigma(\Delta_r)$ estiver contida em algum conjunto $V$ da cobertura $\alpha$.

Usaremos a notação $S_r^\alpha(X)$ para indicar o submódulo de $S_r(X)$ formado pelas cadeias $x = \sum_\sigma x_\sigma \sigma$ que são $\alpha$-pequenas, isto é, que são combinações lineares de $r$-simplexos $\alpha$-pequenos. É imediato que $\partial(S_r^\alpha(X)) \subset S_{r-1}^\alpha(X)$, de forma que os módulos $S_r^\alpha(X)$, com $r \geq 0$, constituem um subcomplexo $\mathcal{S}^\alpha(X) \subset \mathcal{S}(X)$, cujos grupos de homologia indicaremos com $H_r^\alpha(X)$.

**Teorema 2.** *$H_r^\alpha(X) = H_r(X)$ para todo $r \geq 0$*

**Demonstração:** Começamos lembrando que, para todo simplexo $\sigma\colon \Delta_r \to X$, a cadeia $\beta(\sigma)$ é uma combinação linear de subsimplexos do tipo $\sigma\circ\ell$, onde a imagem do simplexo afim $\ell$ é um simplexo da subdivisão baricêntrica de $\Delta_r$ . Segue-se então do Corolário 1 do Capítulo III que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $q$ tal que a $q$-ésima subdivisão baricêntrica $\beta^q(\sigma)$ é combinação linear de subsimplexos $\sigma \circ \ell$, onde a imagem de $\ell$ é um (simplexo) subconjunto de $\Delta_r$ com diâmetro $< \varepsilon$.

Dito isto, consideremos um simplexo singular $\sigma\colon \Delta_r \to X$. Seja $\varepsilon > 0$ um número de Lebesgue da cobertura de $\Delta_r$ formada pelas imagens inversas $\sigma^{-1}(V)$, $V \in \alpha$. Existe $q$ tal que todos os simplexos da subdivisão baricêntrica iterada $\beta^q(\sigma)$ têm diâmetro $< \varepsilon$, logo $\beta^q(\sigma)$ é uma cadeia em $S_r^\alpha(X)$. Mais geralmente, para cada

cadeia $x \in S_r(X)$ existe $q$ tal que $\beta^q(x) \in S_r^\alpha(X)$. Ora, como acabamos de ver, para todo ciclo $z \in S_r(X)$, as classes de homologia de $z$ e de $\beta^q(z)$ coincidem, pois $(\beta^q)_*\colon H_r(X) \to H_r(X)$ é o isomorfismo identidade. Logo $H_r^\alpha(X) = H_r(X)$. $\square$

Agora estamos em condições de estabelecer a seqüência de Mayer-Vietoris para homologia singular.

Sejam $U, V \subset X$ tais que $\text{int.}U \cup \text{int.}V = X$. Chamando de $\alpha$ a cobertura $\{U, V\}$, vê-se imediatamente que é exata a seqüência curta abaixo, onde $i(x) = (x, x)$ e $j(x, y) = x - y$:

$$0 \longrightarrow S_r^\alpha(U \cap V) \xrightarrow{i} S_r^\alpha(U) \oplus S_r^\alpha(V) \xrightarrow{j} S_r^\alpha(X) \longrightarrow 0.$$

Levando em conta que $H^\alpha(X) = H(X)$, obtemos a *seqüência exata de Mayer-Vietoris* para homologia singular:

$$\cdots \to H_r(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_r(U) \oplus H_r(V) \xrightarrow{j_*} H_r(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(U \cap V) \to \cdots$$

na qual, para toda classe $[z] \in H_r(X)$, $\partial_*[z]$ se define assim: tem-se $z = x - y$ com $x \in S_r(U)$, $y \in S_r(V)$ e $\partial x = \partial y$. Então $\partial_*[z] = [\partial x]$. Como $\partial x \in S_r(U)$ e $\partial y \in S_r(V)$, tem-se $\partial x = \partial y \in S_r(U) \cap S_r(V) = S_r(U \cap V)$.

**Exemplo 3.** Como primeira aplicação da seqüência de Mayer-Vietoris, calcularemos a homologia singular da esfera $S^n$. Sem prejuízo da leitura, este exemplo pode ser omitido pois no Teorema 3 a seguir faremos a demonstração de que, para poliedros, as homologias simplicial e singular coincidem. Começamos com $S^1$. Sejam $U$, $V$ arcos abertos, tais que $S^1 = U \cup V$ e $U \cap V$ é a reunião de dois arcos disjuntos, logo tem o tipo de homotopia de um par de pontos. Na seqüência de Mayer-Vietoris correspondente à decomposição $S^1 = U \cup V$, destaquemos o trecho

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(U \cap V) \xrightarrow{i_*} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

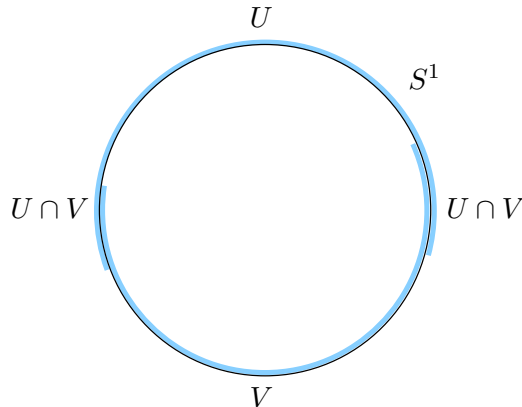



**Figura 29.**

Como $H_1(U) = H_1(V) = 0$, vemos que $\partial_*$ é injetivo, ou seja, é um isomorfismo de $H_1(S^1)$ sobre sua imagem, a qual é o núcleo de $i_*$. Toda 0-cadeia em $U \cap V$ é da forma $z = x + y$, onde $x$ e $y$ são 0-cadeias em cada uma das duas componentes conexas de $U \cap V$, e a classe $[z]$ é caracterizada pelos índices $\alpha = \text{In}(x)$, $\beta = \text{In}(y)$, pertencentes a $A$. Escrevemos então $[z] = (\alpha, \beta)$. O homomorfismo $i_*$ é dado por $i_*(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$. Por conseguinte, seu núcleo corresponde aos pares $(\alpha, -\alpha)$ com $\alpha \in A$, logo é isomorfo a $A$. Concluímos então que $H_1(S^1) = A$. Se $r > 1$ então a seqüência de Mayer-Vietoris contém a parte $H_r(U) \oplus H_r(V) \to H_r(S^1) \to H_{r-1}(U \cap V)$, ou seja, $0 \to H_r(S^1) \to 0$, o que nos mostra que $H_r(S^1) = 0$ quando $r > 1$.

Para o caso geral, fixamos $\varepsilon \in (0, 1)$ e usamos a decomposição $S^n = U \cup V$, onde

$$U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} > -\varepsilon\} \text{ e}$$
$$V = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} < \varepsilon\}$$

portanto $U \cap V$ tem o tipo de homotopia de $S^{n-1}$. Da seqüência de Mayer-Vietoris relativa à decomposição $S^n = U \cup V$ retiramos o

trecho

$$H_r(U) \oplus H_r(V) \to H_r(S^n) \to H_{r-1}(U \cap V) \to H_{r-1}(U) \oplus H_{r-1}(V),$$

que se reduz a

$$0 \to H_r(S^n) \to H_{r-1}(S^{n-1}) \to 0$$

quando $r > 1$ e $n > 1$. Logo, nestes casos, temos $H_r(S^n)$ isomorfo a $H_{r-1}(S^{n-1})$. Prosseguindo, vemos que $H_n(S^n)$ é isomorfo a $H_1(S^1) = A$. Se $r > n$, digamos $r = n + k$, então $H_r(S^n)$ é isomorfo a $H_{k+1}(S^1)$, logo é zero. Finalmente, se $r < n$ então $H_r(S^n)$ é isomorfo a $H_1(S^{n-r+1})$, logo concluiremos que $H_r(S^n) = 0$ se mostrarmos que $H_r(S^m) = 0$ quando $m \geq 2$. Isto, porém, resultará imediatamente da seqüência exata $0 \to H_1(S^m) \xrightarrow{\partial_*} A \xrightarrow{i_*} A \oplus A$ onde $A = H_0(S^{m-1})$ e $A \oplus A = H_0(U) \oplus H_0(V)$, notando que $i_*(\alpha) = (\alpha, \alpha)$, logo o núcleo de $i_*$, ou seja, a imagem do homomorfismo injetivo $\partial_*$, é zero.

Conclusão: $H_r(S^n)=0$ se $0<r<n$ ou $r>n$ e $H_n(S^n)=A$. ▷

**Teorema 3.** *Num poliedro, os grupos de homologia simplicial e singular são isomorfos.*

**Demonstração:** Para cada $r \geq 0$, sejam $c_r(K)$ e $S_r(K)$, respectivamente, os grupos de cadeias simpliciais ordenadas e singulares do poliedro $K$, ambos com coeficientes no mesmo anel $A$. A cada simplexo ordenado $(s) = (a_0, \dots, a_r)$ associemos o simplexo singular afim $\varphi(s) \colon \Delta_r \to K$, tal que $\varphi(e_0) = a_0, \dots, \varphi(e_r) = a_r$. Isto define o morfismo $\varphi \colon \mathfrak{c}(K) \to \mathcal{S}(K)$. Indiquemos com $H_r(K)$ e $\overline{H}_r(K)$ respectivamente os grupos de homologia simplicial e singular de $K$. A fim de mostrar que cada homomorfismo $\varphi_* \colon H_r(K) \to \overline{H}_r(K)$, induzido por $\varphi$, é um isomorfismo, usaremos indução sobre o número de simplexos de $K$. A afirmação é óbvia se $K$ tem apenas um simplexo, pois neste caso $K$ se reduz a um ponto. Supondo que $\varphi_* \colon H_r(K) \to \overline{H}_r(K)$ é um isomorfismo para todo poliedro com

menos do que $k$ simplexos, seja $k$ o número de simplexos de $K$. Então, se $s$ é um simplexo de $K$ com dimensão máxima, os poliedros $L = K - \text{int}.s$ e $s$ têm menos de $k$ simplexos. Na homologia simplicial, a decomposição $K = L \cup s$ determina uma seqüência de Mayer-Vietoris, mesmo que os interiores de $L$ e $s$ não cubram $K$, pois toda cadeia em $K$ é soma de uma cadeia em $L$ com outra em $s$. A fim de obter uma seqüência de Mayer-Vietoris em homologia singular, substituímos a decomposição $K = L \cup s$ por $K = U \cup s$, onde $U = K - \{b\}$, $b =$ baricentro de $s$. Assim, $U$ é aberto, vale $K = \text{int}.U \cup \text{int}.s$ e, ademais, uma deformação radial a partir de $b$, de $s - \{b\}$ sobre a fronteira de $s$, mostra que $L$ é um retrato de deformação de $U$. Portanto, na seqüência de Mayer-Vietoris associada à decomposição $K = U \cup s$ em homologia singular podemos substituir $U$ por $L$. Os homomorfismos $\varphi_*\colon H_r(K) \to \overline{H}_r(K)$ levam ao diagrama comutativo abaixo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
H_r(L \cap s) & \longrightarrow & H_r(L) \oplus H_r(s) & \longrightarrow & H_r(K) & \longrightarrow \\
\downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & \\
\overline{H}_r(L \cap s) & \longrightarrow & \overline{H}_r(L) \oplus \overline{H}_r(s) & \longrightarrow & \overline{H}_r(K) & \longrightarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & H_{r-1}(L \cap s) & \longrightarrow & H_{r-1}(L) \oplus H_{r-1}(s) \\
 & \downarrow{\scriptstyle 3} & & \downarrow{\scriptstyle 4} \\
\longrightarrow & \overline{H}_{r-1}(L \cap s) & \longrightarrow & H_{r-1}(L) \oplus H_{r-1}(s)
\end{array}
$$

Como $L$ e $L \cap s$ têm menos simplexos do que $K$, a hipótese de indução assegura que os homomorfismos 1, 2, 3 e 4 são isomorfismos. Resulta então do Lema dos Cinco que $\varphi_*$ é um isomorfismo. $\square$

# 4 Cohomologia singular

Conforme as definições gerais, se $S_r(X)$ é o $A$-módulo das cadeias singulares de dimensão $r$ e coeficientes em $A$ então $S^r(X) = \mathrm{Hom}(S_r(X), A)$ é o $A$-módulo das cocadeias de mesma dimensão, no mesmo espaço $X$, com os mesmos coeficientes. Os elementos de $S^r(X)$ são os homomorfismos $u\colon S_r(X) \to A$. Como $S_r(X)$ é um $A$-módulo livre, tendo como base o conjunto dos simplexos singulares $\sigma\colon \Delta_r \to X$, uma cocadeia $u \in S^r(X)$ fica determinada quando são dados os valores $u(\sigma) \in A$, para todo $r$-simplexo $\sigma$ em $X$, e esses valores podem ser atribuídos de modo inteiramente arbitrário. Como há infinitos $\sigma$ (salvo no caso trivial em que $X$ é finito), segue-se que se pode ter, para uma determinada $u \in S^r(X)$, $u(\sigma) \neq 0$ para infinitos valores de $\sigma$. Assim, ao contrário do que ocorre com poliedros, as cocadeias do tipo $u = \sigma^*$, tais que $u(\sigma) = 1$ e $u(\sigma') = 0$ se $\sigma' \neq \sigma$, não formam uma base de $S^r(X)$. Mais precisamente, temos $S_r(X) \approx \bigoplus_\sigma A_\sigma$ e $S^r(X) \approx \prod_\sigma A_\sigma$, onde $A_\sigma = A$ para todo $\sigma\colon \Delta_r \to X$.

O operador cobordo $\delta\colon S^r(X) \to S^{r+1}(X)$ é definido como o adjunto do operador bordo $\partial\colon S_{r+1}(X) \to S_r(X)$, ou seja $(\delta u)(x) = u(\partial x)$ para toda $x \in S_{r+1}(X)$.

Evidentemente, como $\delta = \partial^\top$, tem-se $\delta \circ \delta = \partial^\top \circ \partial^\top = (\partial \circ \partial)^\top = 0$. Portanto a seqüência

$$\mathcal{S}^*(X)\colon S^0(X) \xrightarrow{\delta} S^1(X) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} S^r(X) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

é um complexo de cocadeias, cujos grupos de cohomologia $H^r(\mathcal{S}^*(X)) = H^r(X)$ são os grupos de *cohomologia singular* do espaço $X$.

Como sabemos, uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ induz, para cada $r \geq 0$, um homomorfismo $f\colon S_r(X) \to S_r(Y)$, que indicamos ainda com $f$, definido por $f\sigma = f \circ \sigma$, $\sigma\colon \Delta_r \to X$, o qual cumpre $f \circ \partial = \partial \circ f$ logo define um morfismo $f\colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ entre

os complexos singulares e por conseguinte induz homomorfismos $f_*\colon H_r(X) \to H_r(Y)$, para todo $r \geq 0$. Os homomorfismos adjuntos $f^\top\colon S^r(Y) \to S^r(X)$, dados por $(f^\top u)(y) = u(fy)$ para toda $y \in S_r(Y)$, são tais que $\delta \circ f^\top = f^\top \circ \delta$ logo induzem homomorfismos $f^*\colon H^r(Y) \to H^r(X)$, $r \geq 0$. Se $g\colon Y \to Z$ é outra aplicação contínua, tem-se $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^r(Z) \to H^r(X)$ e se $f = \mathrm{id}\colon X \to X$ então $f^* = \mathrm{id}\colon H^r(X) \to H^r(X)$.

Se as aplicações contínuas $f, g\colon X \to Y$ são homotópicas então $f^* = g^*\colon H^r(Y) \to H^r(X)$ para todo $r \geq 0$. Com efeito, sabemos que existem homomorfismos $D\colon S_r(X) \to S_{r+1}(Y)$ tais que $\partial D + D\partial = f - g\colon S_r(X) \to S_r(Y)$. (Homotopia algébrica.) Então os homomorfismos adjuntos $D^\top\colon S^{r+1}(Y) \to S^r(X)$ cumprem $D^\top\delta + \delta D^\top = f^\top - g^\top$, logo $f^\top(v) - g^\top(v) = D^\top\delta(v) + \delta D^\top(v) = \delta(D^\top v)$ para todo cociclo $v \in S^r(Y)$, portanto $f^*[v] = g^*[v]$, ou seja $f^* = g^*\colon H^r(Y) \to H^r(X)$.

Há também uma seqüência de Mayer-Vietoris para a cohomologia singular, conforme mostraremos agora. Se $\alpha$ é uma cobertura do espaço $X$ por conjuntos cujos interiores ainda cobrem $X$, sabemos que os simplexos singulares $\alpha$-pequenos geram um subcomplexo $\mathcal{S}^\alpha(X) \subset \mathcal{S}(X)$ cujos grupos de homologia são naturalmente isomorfos aos de $\mathcal{S}(X)$: as aplicações de inclusão $\varphi\colon S_r^\alpha(X) \to S_r(X)$ possuem inversas homotópicas $\psi\colon S_r(X) \to S_r^\alpha(X)$, ou seja, existem homomorfismos $D\colon S_r(X) \to S_{r+1}(X)$ tais que $(\partial D + D\partial)x = \psi(\varphi(x)) - x$ para toda cadeia $x \in S_r(X)$, além do que $\varphi(\psi(y)) = y$ para toda $y \in S_r^\alpha(X)$. Portanto, chamando de $H_r^\alpha(X)$ os grupos de homologia de $\mathcal{S}^\alpha(X)$, cada $\varphi_*\colon H_r^\alpha(X) \to H_r(X)$ é um isomorfismo, cujo inverso é $\psi_*\colon H_r(X) \to H_r^\alpha(X)$. (Na verdade, $\psi$ é um iterado da subdivisão baricêntrica.)

Considerando os grupos de cocadeias $S_\alpha^r(X) = \mathrm{Hom}(S_r^\alpha(X); A)$ e os adjuntos $\varphi^\top\colon S^r(X) \to S_\alpha^r(X)$, $\psi^\top\colon S_\alpha^r(X) \to S^r(X)$ e $D^\top : S^{r+1}(X) \to S^r(X)$ vemos que, para toda cocadeia $u \in S^r(X)$ tem-se $(\delta D^\top + D^\top\delta)u = \varphi^\top(\psi^\top(u)) - u$ e $\psi^\top(\varphi^\top(v)) = v$ para toda

$v \in S^r_\alpha(X)$. Portanto $\varphi^*\colon H^r(X) \to H^r_\alpha(X)$ e $\psi^*\colon H^r_\alpha(X) \to H^r(X)$ são isomorfismos, inversos um do outro.

Se $U$ e $V$ são subconjuntos de $X$ tais que $X = \text{int}.U \cup \text{int}.V$, em relação à cobertura $\alpha = \{U, V\}$ temos as seqüências exatas curtas

$$(*) \qquad 0 \to S^\alpha_r(U \cap V) \xrightarrow{\ i\ } S^\alpha_r(U) \oplus S^\alpha_r(V) \xrightarrow{\ j\ } S^\alpha_r(X) \to 0,\ \ r \geq 0,$$

cujas duais

$$0 \to S^r_\alpha(X) \xrightarrow{\ j^\top\ } S^r_\alpha(U) \oplus S^r_\alpha(V) \xrightarrow{\ i^\top\ } S^r_\alpha(U \cap V) \to 0$$

são ainda exatas pois $S^\alpha_r(X)$ é um módulo livre, portanto cada seqüência $(*)$ é separável.

Isto fornece a seqüência exata de cohomologia

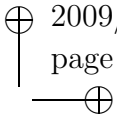
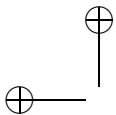
$$\to H^r(X) \xrightarrow{\ j^*\ } H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{\ i^*\ } H^r(U \cap V) \xrightarrow{\ \partial_*\ } H^{r+1}(U) \oplus H^{r+1}(V) \to \cdots$$

onde escrevemos $H^r(X)$ em vez de $H^r_\alpha(X)$, etc.

Esta é a seqüência de Mayer-Vietoris para cohomologia singular.

Utilizando-a, do mesmo modo como fizemos para homologia, concluiremos que a cohomologia singular de um poliedro $K$ é naturalmente isomorfa à cohomologia simplicial com os mesmos coeficientes.

Mais precisamente, considerando o morfismo natural $\varphi\colon \mathfrak{c}(K) \to \mathcal{S}(K)$, introduzido na demonstração do Teorema 3, vemos que o morfismo adjunto $\varphi^\top\colon \mathcal{S}^*(K) \to \mathfrak{c}^*(K)$ induz isomorfismos $\varphi^*\colon \overline{H}^r(K) \to H^r(K)$ dos grupos de cohomologia singular de $K$ sobre os grupos de cohomologia simplicial. Estes são também isomorfismos de anéis, desde que definamos, da forma evidente, a multiplicação de cocadeias singulares, como faremos agora.

Sejam $u \in S^q(X)$, $v \in S^r(X)$ cocadeias no espaço topológico $X$, ambas com coeficientes no anel $A$. Seu *produto* (chamado *cup-product*) é a cocadeia $u \cup v \in S^{q+r}(X)$, definida estipulando-se seu

valor em cada $(q+r)$-simplexo singular $\sigma\colon \Delta_{q+r} \to X$ pondo-se $(u \cup v)(\sigma) = u(\sigma') \cdot v(\sigma'')$, onde $\sigma'\colon \Delta_q \to X$ e $\sigma''\colon \Delta_r \to X$ são dados por

$$\sigma'(t_0, \ldots, t_q) = \sigma(t_0, \ldots, t_q, 0, \ldots, 0) \qquad \text{e}$$
$$\sigma''(t_0, \ldots, t_r) = \sigma(0, \ldots, 0, t_q, \ldots, t_{q+r}).$$

Tem-se

$$\delta(u \cup v) = (\delta u) \cup v + (-1)^q\, u \cup \delta v,$$

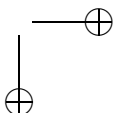
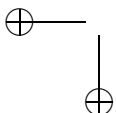
logo a definição $[u] \cup [v] = [u \cup v]$ produz aplicações bilineares $H^q(X) \times H^r(X) \to H^{q+r}(X)$ que dão à soma direta $H^*(X) = \bigoplus_r H^r(X)$ uma estrutura de anel. Com o mesmo argumento usado no caso simplicial, mostra-se que $[u] \cup [v] = (-1)^{qr}[v] \cup [u]$ e $u \in S^q(X)$ e $v \in S^r(X)$ são cociclos. Vê-se ainda que, se $K$ é um poliedro, o morfismo $\varphi^\top\colon \mathcal{S}^*(K) \to \mathfrak{c}^*(K)$ respeita a multiplicação de cocadeias, logo $\varphi^*\colon \overline{H}^r(K) \to H^r(K)$ é um isomorfismo de anéis. (Na notação da prova do Teorema 3.)

## INTERMEZZO: Relação entre $\pi_1(X, x_0)$ e $H_1(X)$

Neste intervalo, demonstramos o teorema devido a Poincaré, segundo o qual o grupo de homologia singular $H_1(X)$ com coeficientes inteiros, de um espaço conexo por caminhos, é o grupo fundamental $\pi_1(X; x_0)$ abelianizado, ou seja, é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X; x_0)/[\pi_1, \pi_1]$, onde $[\pi_1, \pi_1] \subset \pi_1(X; x_0)$ é o subgrupo dos comutadores. Nossa referência para o grupo fundamental é [GFER].

Inicialmente, lembremos que se $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ é um 2-simplexo singular então seu bordo $\partial\sigma \in S_1(X)$ é dado por

$$\partial\sigma = \partial_0\sigma - \partial_1\sigma + \partial_2\sigma$$

onde $\partial_0\sigma, \partial_1\sigma, \partial_2\sigma\colon \Delta_1 \to X$ são definidos por $\partial_0\sigma(t_0, t_1) = \sigma(0, t_0, t_1)$, $\partial_1\sigma(t_0, t_1) = \sigma(t_0, 0, t_1)$ e $\partial_2\sigma(t_0, t_1) = \sigma(t_0, t_1, 0)$.

Identificaremos $\Delta_1$ com o intervalo $I = [0,1]$ por meio do homeomorfismo $h\colon I \to \Delta_1$, $h(t) = (t, 1-t)$. Assim, teremos os caminhos $\partial_0\sigma, \partial_1\sigma, \partial_2\sigma\colon I \to X$, definidos por

$$\partial_0\sigma(t) = \sigma(0, t, 1-t),\ \partial_1\sigma(t) = \sigma(t, 0, 1-t) \ \text{ e } \ \partial_2\sigma = \sigma(t, 1-t, 0).$$

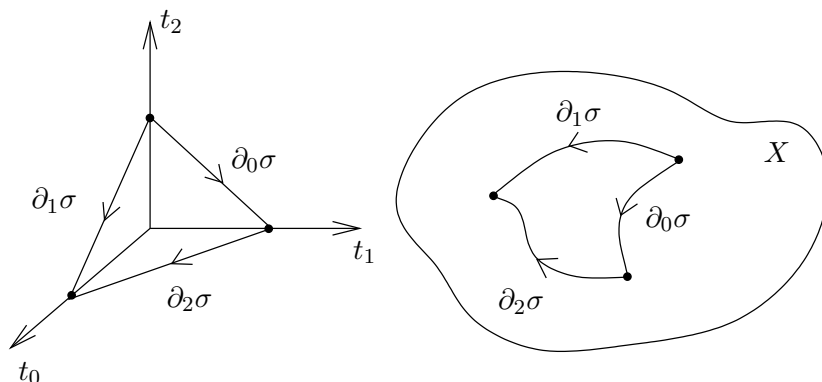



**Figura 30.**

Cada caminho $a\colon I \to X$ pode então ser identificado a um 1-simplexo singular em $X$ e vice-versa. Se $a(0) = a(1) = x_0$ a classe de homotopia de $a$ será indicada com $\{a\} \in \pi_1(X; x_0)$ e sua classe de homologia será $[a] \in H_1(X)$. (Evidentemente, $a \in S_1(X)$ é um ciclo.)

Sejam $a, b\colon I \to X$ caminhos fechados com ponto básico $x_0$, isto é, $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = x_0$. Se $a$ e $b$ são homotópicos, ou seja, $\{a\} = \{b\}$, então $[a] = [b] \in H_1(X)$, isto é, os ciclos $a$ e $b$ são homólogos. Com efeito a homotopia $a_t\colon [0,1] \to X$ define, conforme diagrama abaixo, um simplexo $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ cujo bordo é $\partial\sigma = b - a + x_0$, onde $x_0\colon I \to X$ é constante. Ora, $x_0 = \partial y$, onde $y\colon \Delta_2 \to X$ é constante $= x_0$. Logo $b - a = \partial(\sigma - y)$ e $[b] = [a] \in H_1(X)$. Assim, a aplicação $\pi_1(X; x_0) \xrightarrow{\varphi} H_1(X)$, dada por $\varphi\{a\} = [a]$, está bem definida.

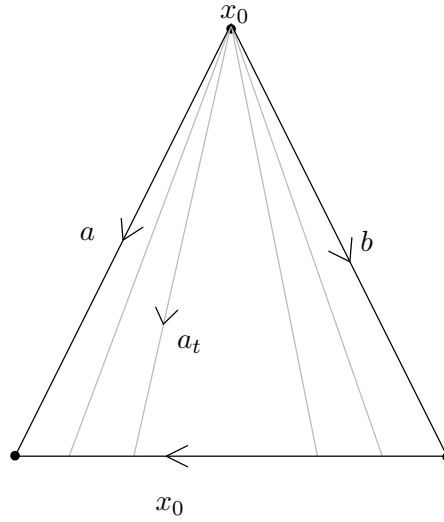



**Figura 31.**

**1** *$\varphi$ é um homomorfismo*

O diagrama abaixo descreve um 2-simplexo $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ tal que $\partial\sigma = a - ab + b$, logo $[ab] = [a] + [b]$, isto é, $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$

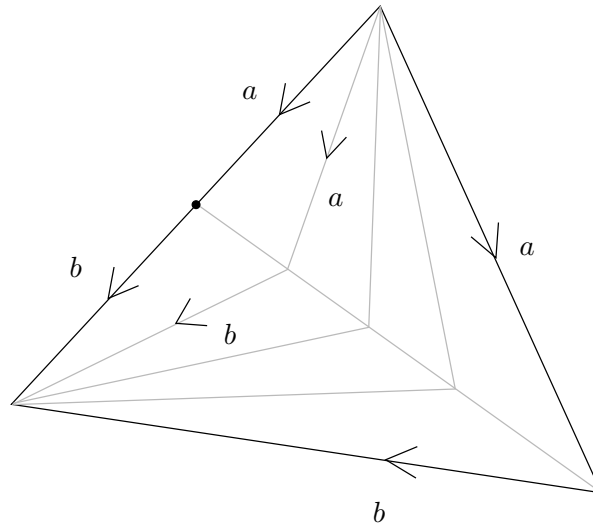



**Figura 32.**

**2** *$\varphi$ é sobrejetivo*

Aqui usamos a hipótese de que $X$ é conexo por caminhos.

Para cada ponto $p \in X$ escolhamos, de uma vez por todas, um caminho $a_p \colon I \to X$ ligando $x_0$ a $p$. A cada 1-simplexo $\sigma \colon I \to X$, com $\sigma(0) = p$ e $\sigma(1) = q$ associamos o caminho $\widetilde{\sigma} \colon I \to X$, com base $x_0$, onde $\widetilde{\sigma} = a_p \, \sigma \, a_q^{-1}$.

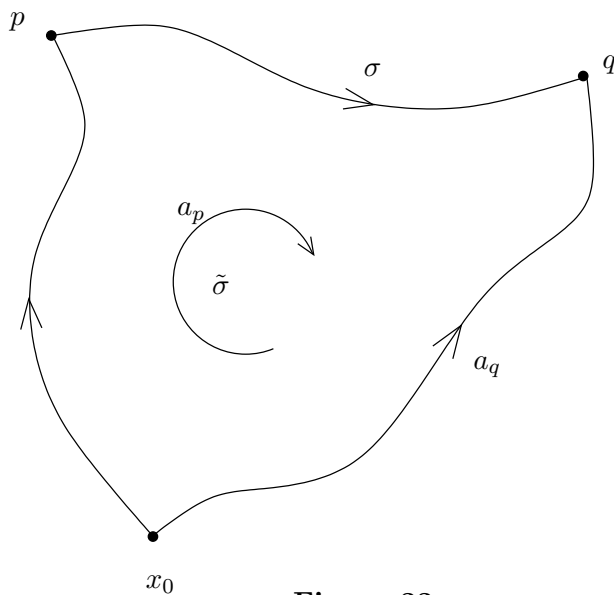



**Figura 33.**

Seja $z = \sum n_i \sigma_i \in Z_1(X)$ um ciclo, portanto $0 = \partial z = \sum n_i(q_i - p_i)$, onde $p_i$ e $q_i$ são as extremidades de $\sigma_i$. Escrevamos $a_i = a_{p_i}$ e $b_i = a_{q_i}$.

Como não há relações entre os $p_i$ e os $q_i$, e muito menos entre os $a_i$ e os $b_i$, concluímos, a partir de $\sum n_i(q_i - p_i) = 0$, que

$$\sum n_i(b_i - a_i) = 0, \quad \text{logo} \quad \sum n_i(a_i + \sigma_i - b_i) = z.$$

Portanto, $[z] = \varphi(\alpha)$, onde $\alpha = \prod \{\widetilde{\sigma}_i\}^{n_i}$.

**3** *O núcleo de $\varphi$ é o subgrupo comutador $[\pi_1, \pi_1] \subset \pi_1(X; x_0)$*

Como $H_1(X)$ é comutativo, $[\pi_1, \pi_1] \subset$ núcleo de $\varphi$. Reciprocamente, seja $a\colon (I, \partial I) \to (X; x_0)$ tal que $a \in S_1(X)$ é um bordo: $a = \partial(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i \partial\sigma_i$, com $\sigma_i\colon \Delta_2 \to X$. Seja $\partial\sigma_i = c_i - b_i + a_i$. Então

$$(*) \qquad \sum n_i(c_i - b_i + a_i) = a.$$

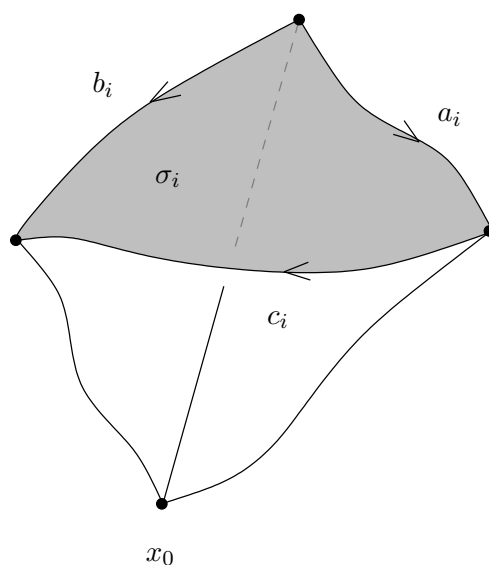



**Figura 34.**

Como $a_i c_i \simeq b_i$, logo $\widetilde{a}_i \cdot \widetilde{c}_i \simeq \widetilde{b}_i$, ou seja, $\widetilde{a}_i \widetilde{c}_i \widetilde{b}_i^{-1} \simeq x_0$, podemos escrever $\quad \Pi\{\tilde{a}_i \cdot \tilde{c}_i \cdot \tilde{b}_i^{-1}\}^{n_i} = 1. \quad$ (A)

Por outro lado, se trocarmos livremente a ordem dos fatores em $\pi_1(X, x_0)$, resultará de (*) que $\quad \Pi\{\widetilde{c}_i \tilde{b}_i^{-1} \widetilde{a}_i\}^{n_i} = \{a\}. \quad$ (B).
Comparando (A) e (B), concluimos que $\{a\}$ pertence ao subgrupo dos comutadores de $\pi_1(X; x_0)$. □

Como conseqüência do Teorema de Poincaré, vemos que se $M$ é uma superfície bidimensional orientável compacta de gênero $g$

então $H_1(M)$, com coeficientes inteiros, é um grupo abeliano livre com $2g$ geradores. Isto inclui $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, pois o toro $T^2$ é uma superfície de gênero 1, a esfera $S^2$, que tem gênero zero, logo $H_1(S^2) = 0$, o bitoro, de gênero 2, com $H_1(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, etc.

De fato, está provado em ([GFER]), pag. 176) que o grupo fundamental de uma superfície compacta $M$, de gênero $g$, é um grupo com $2g$ geradores $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ e uma única relação $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$. Abelianizando, esta relação se torna trivial logo $H_1(M)$ é um grupo abeliano livre, com $2g$ geradores.

Já o grupo fundamental de uma superfície bidimensional compacta não-orientável $M$ de gênero $g$ possui $h = g + 1$ geradores $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$, sujeitos à única relação $\gamma_1^2\,\gamma_2^2 \ldots \gamma_h^2 = 1$. Assim, seu abelianizado $H_1(M)$ é gerado pelas classes de homologia dos $\gamma_i$ com a única relação $2(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h) = 0$. Em particular, o plano projetivo $P^2$, que tem gênero zero, tem o grupo $H_1(P^2)$ com o único gerador $\gamma$ (a reta projetiva) com $2\gamma = 0$. A garrafa de Klein $K$, que tem gênero 1, apresenta $H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, isto é, dois geradores, um sem torção e o outro com torção 2, conforme se vê a partir dos geradores $\alpha = \gamma_1$ e $\beta = \gamma_1 + \gamma_2$, os quais cumprem a relação $2\beta = 2(\gamma_1 + \gamma_2) = 0$. Mais geralmente, tomando como geradores do grupo de homologia com coeficientes inteiros de uma superfície não-orientável $M$ as classes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ e $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k-1} + \gamma_k$ vemos que $H_1(M)$ é gerado por $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma$ com a única relação $2\gamma = 0$, logo tem-se $H_1(M) = \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

# 5 Teorema de deRham

Assim como a homologia e a cohomologia singulares coincidem com as simpliciais nos espaços homeomorfos a poliedros, também a cohomologia singular, com coeficientes no corpo dos números reais,

numa superfície diferenciável orientável $M$, coincide com a cohomologia de deRham de $M$. Esta afirmação é o clássico Teorema de deRham, que provaremos aqui.

Inicialmente mostraremos que, para obter os grupos de homologia (e também cohomologia) singular de uma superfície diferenciável $M$, basta considerar os simplexos diferenciáveis $\sigma\colon \Delta_r \to M$, isto é, as restrições de aplicações diferenciáveis definidas em abertos do espaço euclidiano que contém $\Delta_r$.

Indicaremos com $\mathcal{S}^\infty(M) \subset \mathcal{S}(M)$ o subcomplexo gerado pelos simplexos diferenciáveis da superfície $M$, com $S_r^\infty(M)$ o $A$-módulo das $r$-cadeias diferenciáveis e com $H_r^\infty(M)$ o grupo de homologia de dimensão $r$ de $\mathcal{S}^\infty(M)$.

**Teorema 4.** *A inclusão $i\colon \mathcal{S}^\infty(M) \to \mathcal{S}(M)$ induz, para cada $r \geq 0$, um isomorfismo $i_*\colon H_r^\infty(M) \to H_r(M)$.*

**Demonstração:** Sejam $\pi\colon V \to M$ uma vizinhança tubular de $M$ no espaço euclidiano e $\alpha$ a cobertura aberta de $M$ formada pelas interseções $U = B \cap M$, onde $B$ é uma bola aberta do espaço euclidiano, contida em $V$. Para cada simplexo $\alpha$-pequeno $\sigma\colon \Delta_r \to M$, o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da imagem $\sigma(\Delta_r)$ está contido em $V$. Assim, $V$ contém o simplexo afim $\langle\sigma(e_0), \ldots, \sigma(e_r)\rangle$, logo tem sentido a composta $\overline{\sigma} = \pi \circ \langle\sigma(e_0), \ldots, \sigma(e_r)\rangle\colon \Delta_r \to M$, que é um simplexo diferenciável. Definimos então o morfismo $\varphi\colon \mathcal{S}^\alpha(M) \to \mathcal{S}^\infty(M)$, pondo $\varphi(\sigma) = \overline{\sigma}$. Mostraremos agora que $\varphi_*\colon H_r^\alpha(M) \to H_r^\infty(M)$ é, para cada $r \geq 0$, um isomorfismo, cujo inverso é $i_*$. (Lembremos que $H_r^\alpha(M) = H_r(M)$.) Para tal, construiremos, sobre cada $\sigma \in S_r^\alpha(M)$, o prisma singular $P_\sigma\colon \Delta_r \times [0,1] \to M$, o qual é a homotopia composta da homotopia retilínea entre $\sigma$ e $\langle\sigma(e_0), \ldots, \sigma(e_r)\rangle$ com a homotopia retilínea entre a aplicação identidade $V \to V$ e a projeção $\pi\colon V \to M \subset V$. Os prismas $P_\sigma$ têm as seguintes propriedades:

(1) $P_\sigma(x, 0) = \sigma(x)$ e $P_\sigma(x, 1) = \overline{\sigma}(x)$ para todo $x \in \Delta_r$;

(2) $\partial_i P_\sigma = P_{\partial_i \sigma}$ (onde $\partial_i P_\sigma = P_\sigma|(\partial_i \Delta_r \times [0,1])$).

Escrevendo $A_i = (e_i, 0)$ e $B_i = (e_i, 1)$, definimos o homomorfismo $D\colon S_r^\alpha(M) \to S_r^\infty(M)$ pondo

$$D\sigma = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \,(P_\sigma|\langle A_0, \ldots, A_i,\, B_i, \ldots, B_r\rangle).$$

Então verificamos que $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \overline{\sigma}$. Resulta imediatamente daí que todo $r$-ciclo $z \in S_r^\alpha(M)$ é homólogo ao $r$-ciclo diferenciável $\overline{z} = \varphi(z)$, logo $\varphi_*\colon H_r^\alpha(M) \to H_r^\infty(M)$ é um isomorfismo, inverso de $i_*\colon H_r^\infty(M) \to H_r^\alpha(M)$. Agora é só lembrar que $H_r^\alpha(M) = H_r(M)$. □

Os homomorfismos adjuntos $\varphi^\top\colon S_\infty^r(M) \to S_\alpha^r(M)$, $r \geq 0$, definem um morfismo $\varphi^\top\colon \mathcal{S}_\infty^*(M) \to \mathcal{S}_\alpha^*(M)$ do complexo de cocadeias $\mathcal{S}_\infty^*(M)$, baseado nos simplexos diferenciáveis, no complexo de cocadeias singulares $\mathcal{S}_\alpha^*(M)$, baseado nos simplexos singulares $\alpha$-pequenos, o qual induz, para todo $r \geq 0$, o isomorfismo $\varphi^*\colon H_\infty^r(M) \to H^r(M)$, do grupo de cohomologia "diferenciável" $H_\infty^r(M)$ no grupo de cohomologia singular de $M$. Note-e que $\varphi^*([u])$ é a classe de cohomologia da restrição do cociclo $u$ às cadeias diferenciáveis. Sendo assim, $\varphi^*$ é induzido pelo homomorfismo adjunto da inclusão $S_r^\infty(M) \to S_r(M)$.

Doravante, todos os simplexos singulares numa superfície serão supostos diferenciáveis e as cadeias/cocadeias terão coeficientes em $\mathbb{R}$. O $r$-ésimo grupo de cohomologia de deRham da superfície $M$ será indicado com $HD^r(M)$, para distingui-lo da cohomologia singular $H^r(M)$. O espaço vetorial das $r$-formas diferenciais continuará sendo $\Lambda^r(M)$, bem como o complexo de deRham $\Lambda^*(M)$.

Ao definirmos a homologia singular, escolhemos $\Delta_r = \langle e_0, \ldots, e_r\rangle \subset \mathbb{R}^{r+1}$ como simplexo padrão. Mas é claro que qualquer outro $r$-simplexo euclidiano teria dado origem a uma teoria inteira e evidentemente equivalente. Uma alternativa razoável é usar como padrão

"main2"
2009/6/19
page 173



o simplexo $\nabla_r = \langle 0, e_1, \dots, e_r \rangle \subset \mathbb{R}^r$, como faremos agora. Tem-se

$$\nabla_r = \big\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r; x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0, \sum x_i \leq 1\big\}.$$

As faces $(r-1)$-dimensionais de $\nabla_r$ são $\partial_0 \nabla_r = \Delta_{r-1}$ e

$$\partial_i \nabla_r = \big\{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_r); \sum x_j \leq 1, x_j \geq 0, j=1, \dots, r\big\}$$

se $i > 0$. Noutras palavras, $\partial_i \nabla_r = \big\{(x_1, \dots, x_r) \in \nabla_r ; x_i = 0\big\}$ se $i > 0$.

Olhando $\nabla_r$ como simplexo singular afim em $\mathbb{R}^r$, temos $\partial \nabla_r = \sum (-1)^i \partial_i \nabla_r$ .

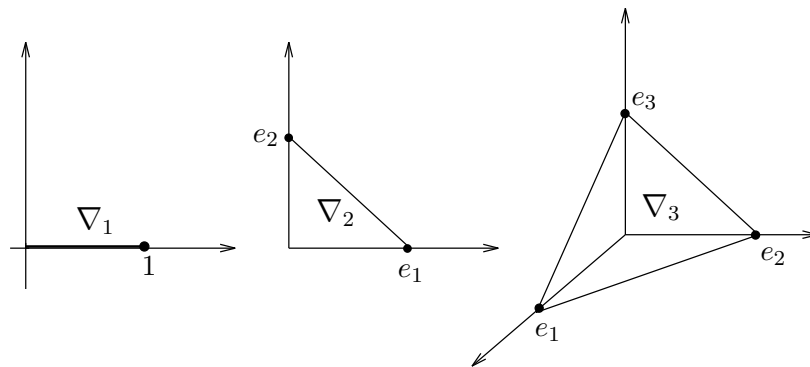



**Figura 35**. Os simplexos $\nabla_1$, $\nabla_2$ e $\nabla_3$.

A cada $r$-forma $\omega \in \Lambda^r(M)$ na superfície orientada $M$ associamos a cocadeia singular $\xi(\omega) \in S^r(M)$, definida por $\xi(\omega) \cdot \sigma = \int_\sigma \omega$ se $\sigma \colon \nabla_r \to M$ é um $r$-simplexo (diferenciável). Bem entendido, $\int_\sigma \omega = \int_{\nabla_r} \sigma^* \omega$, onde o pullback $\sigma^* \omega$ é uma $r$-forma definida na vizinhança de $\nabla_r$ que serve de domínio para $\sigma$.

Isto nos dá um homomorfismo $\xi \colon \Lambda^r(M) \to S^r(M)$ para todo $r \geq 0$. Em seguida, mostraremos que $\xi(d\omega) = \delta(\xi(\omega))$, portanto $\xi$ induz, para todo $r \geq 0$, um homomorfismo $\xi_* \colon HD^r(M) \to H^r(M)$, chamado *homomorfismo de deRham*. O Teorema de deRham afirma que $\xi_*$ é um isomorfismo.

A fim de simplificar a notação e (portanto) facilitar o entendimento, provaremos a igualdade $\xi(d\omega) = \delta(\xi(\omega))$ quando

$$\omega = a dy \wedge dz - b dx \wedge dz + c dx \wedge dy$$

é uma 2-forma, definida num aberto de $\mathbb{R}^3$ contendo $\nabla_3$. O caso geral se trata de modo análogo, apenas com uma notação mais elaborada.

Devemos mostrar que, para todo simplexo diferenciável $\sigma\colon \nabla_3 \to M$, tem-se $\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$.

Inicialmente, consideraremos o caso em que $\sigma$ é o simplexo afim $\nabla_3 = \langle 0, e_1, e_2, e_3\rangle \subset \mathbb{R}^3$, cujo bordo é a cadeia afim

$$\begin{aligned}\partial\nabla_3 &= \partial_0\nabla_3 - \partial_1\nabla_3 + \partial_2\nabla_3 - \partial_3\nabla_3\\ &= \langle e_1, e_2, e_3\rangle - \langle 0, e_2, e_3\rangle + \langle 0, e_1, e_3\rangle - \langle 0, e_1, e_2\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\partial\nabla_2} \omega = \int_{\partial_0\nabla_3} \omega - \int_{\partial_1\nabla_3} \omega + \int_{\partial_2\nabla_3} - \int_{\partial_3\nabla_3} \omega.$$

Se $(x, y, z) \in \partial_0\nabla_3$ então $x, y, z \in [0, 1]$ e $z = 1 - x - y$. Usando os parâmetros $x = s$, $y = t$ temos, em $\partial_0\nabla_3$, $(x, y, z) = (s, t, 1-s-t)$, $dx = ds$, $dy = dt$ e $dz = -(ds + dt)$, portanto

$$\begin{aligned}dy \wedge dz = -dt \wedge ds = ds \wedge dt,\ dx \wedge dz &= ds \wedge (-ds - dt)\\ &= ds \wedge dt \text{ e } dx \wedge dy = ds \wedge dt.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\partial_0\nabla_3} \omega = \int_{\nabla_2} [a(s,t,1-s-t) + b(s,t,1-s-t) + c(s,t,1-s-t)] ds \wedge dt.$$

É claro que $dx = 0$ em $\partial_1\nabla_3$, $dy = 0$ em $\partial_2\nabla_3$ e $dz = 0$ em $\partial_3\nabla_3$.

Portanto, escrevendo $\overline{a}(s,t) = a(s,t,1-s-t)$, $\overline{b}(s,t) = b(s,t,1-s-t)$ e $\overline{c}(s,t) = c(s,t,1-s-t)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\nabla_3} \omega &= \int_{\partial\nabla_3} ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dz \\ &= \int_{\nabla_2} [\overline{a}(s,t) + \overline{b}(s,t) + \overline{c}(s,t) \\ &\qquad - a(0,s,t) - b(s,0,t) - c(s,t,0)] ds \wedge dt.\end{aligned}$$

Por outro lado, o uso direto do Teorema Fundamental do Cálculo nos dá:

$$\begin{aligned}\int_{\nabla_3} d\omega &= \int_{\nabla_3} \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial c}{\partial z}(x,y,z)\right] dxdydz \\ &= \int_{\nabla_2} \big[a(1-s-t,s,t) - a(0,s,t) + b(s,1-s-t,t) \\ &\qquad - b(s,0,t) + c(s,t,1-s-t) - c(s,t,0)\big] dsdt.\end{aligned}$$

Levando em conta que as mudanças de coordenadas $(s,t,1-s-t) \mapsto (1-s-t,s,t)$, $(s,t,1-s-t) \mapsto (s,1-s-t,t)$ e $(s,t,1-s-t) \mapsto (s,t,1-s-t)$ são difeomorfismos de $\nabla_2$ sobre si mesmo cujos determinantes jacobianos têm valor absoluto 1, o Teorema de Mudança de Variávies dá

$$\begin{aligned}\int_{\nabla_3} d\omega &= \int_{\nabla_2} [\overline{a}(s,t) + \overline{b}(s,t) + \overline{c}(s,t)] dsdt \\ &\qquad - \int_{\nabla_2} [a(0,s,t) + b(s,0,t) + c(s,t,0)] dsdt,\end{aligned}$$

portanto $\int_{\nabla_3} d\omega = \int_{\partial\nabla_3} \omega$ quando $\nabla_3$ é o simplexo afim padrão $\langle 0, e_1, e_2, e_3 \rangle$ em $\mathbb{R}^3$.

Em seguida, considerando o simplexo $\sigma\colon \Delta_3 \to M$ numa superfície $M$, mostraremos que se tem $\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$ se $\omega$ é uma 2-forma em $M$. Usando o que acabamos de provar e o fato de que

$\sigma \circ \partial_i \nabla_3 = \partial_i \sigma$ (fácil verificação), temos

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\nabla_3} \sigma^* d\omega = \int_{\nabla_3} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\nabla_3} \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \int_{\partial_i \nabla_3} \sigma^*\omega$$
$$= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \int_{\sigma\circ\partial_i\nabla_3} \omega = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \int_{\partial_i \sigma} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Podemos então enunciar o

**Teorema 5.** (*Stokes simplicial.*) *Para todo* $(r-1)$*-forma* $\omega$ *na superfície orientada* $M$ *e toda cadeia singular* (*diferenciavel*) $x \in S_r(M)$ *tem-se* $\int_x d\omega = \int_{\partial x} \omega$.

Fica assim estabelecido que os homomorfismos $\xi\colon \Lambda^r(M) \to S^r(M)$ definem um morfismo do complexo de deRham $\Lambda^*(M)$ no complexo singular $\mathcal{S}^*(M)$. Para provar que cada homomorfismo induzido $\xi_*\colon HD^r(M) \to H^r(M)$ é um isomorfismo, faremos uso da seqüência de Mayer-Vietoris. Conforme vimos no Capítulo I, temos o diagrama comutativo abaixo, no qual as setas horizontais representam homomorfismos induzidos por $\xi$ e as verticais fazem parte das seqüências de Mayer-Vietoris (relativas a dois abertos $U, V \subset M$) nas cohomologias de deRham e singular.

$$\begin{array}{ccc}
HD^r(U) \oplus HD^r(V) & \xrightarrow{\ 1\ } & H^r(U) \oplus H^r(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
HD^r(U \cap V) & \xrightarrow{\ 2\ } & H^r(U \cap V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
HD^{r+1}(U \cup V) & \xrightarrow{\ 3\ } & H^{r+1}(U \cup V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
HD^{r+1}(U) \oplus HD^{r+1}(V) & \xrightarrow{\ 4\ } & H^{r+1}(U) \oplus H^{r+1}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
HD^{r+1}(U \cap V) & \xrightarrow{\ 5\ } & H^{r+1}(U \cap V)
\end{array}$$

Cabem duas observações, a primeira das quais é óbvia e a segunda é o Lema dos Cinco, visto no Capítulo I.

1. Se o aberto $W \subset M$ é contrátil então, para todo $r \geq 0$, $\xi_*\colon HD^r(W) \to H^r(W)$ é um isomorfismo.

2. Se os homomorfismos 1, 2, 4 e 5 são isomorfismos, então 3 é um isomorfismo.

Usando o Teorema 2, Capítulo II, tomemos uma cobertura aberta simples $\alpha$ na superfície $M$. Para quaisquer $U_1, \dots, U_k$ pertencentes a $\alpha$, o homomorfismo $\xi_*\colon HD^r(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \to H^r(U_1 \cap \cdots \cap U_k)$ é um isomorfismo. Isto é claro quando $r = 0$, pois $\xi_*\colon HD^0(M) \to H^0(M)$ é a aplicação identidade, e quando $r > 0$ porque seu domínio e seu contradomínio são iguais a 0. Usando indução em $k$, segue-se da observação 2 que, para toda reunião finita $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ de abertos pertencentes a $\alpha$ e todo $r \geq 0$, $\xi_*\colon HD^r(U_1 \cup \cdots \cup U_k) \to H^r(U_1 \cup \cdots \cup U_k)$ é um isomorfismo.

Daí já resulta o Teorema de deRham para superfícies compactas e mais geralmente, para *superfícies de tipo finito*, isto é, que admitem uma cobertura aberta simples e finita.

Se a superfície $M$ não é compacta, lembrando a demonstração do Lema 5, Capítulo II, escrevemos $M = U \cup V$, onde $U$ e $V$ são ambos reuniões disjuntas de "faixas" abertas, cada uma das quais é uma superfície do tipo finito (reunião finita de elementos da cobertura $\alpha$). Como naquela ocasião, vemos que $U \cap V$ tem a mesma estrutura de $U$ e $V$. Portanto $\xi_*$ é, para todo $r \geq 0$, um isomorfismo de $HD^r(U)$ sobre $H^r(U)$, de $HD^r(V)$ sobre $H^r(V)$ e de $HD^r(U \cap V)$ sobre $H^r(U \cap V)$. Resulta então do Lema dos Cinco que $\xi_*\colon HD^r(M) \to H^r(M)$ é um isomorfismo, e com isto fica provado o

**Teorema 6.** (*deRham.*) *Em toda superfície diferenciável orientável $M$, os grupos de cohomologia de deRham $HD^r(M)$ e os grupos de cohomologia singular com coeficientes reais $H^r(M)$ são isomorfos.*

Combinando o isomorfismo $\xi_*\colon HD^r(M) \to H^r(M)$ com a dualidade de Poincaré em cohomologia de deRham numa superfície compacta $m$-dimensional orientável $M$, obtemos um isomorfismo $H^{m-r}(M) \approx [H^r(M)]^*$. Isto nos levará ao Teorema de Dualidade de Poincaré $H_r(M) \approx H^{m-r}(M)$ para homologia e cohomologia singulares se provarmos que, nestas condições, vale $H_r(M) \approx [H^r(M)]^*$. Isto é um corolário do

**Teorema 7.** *Para todo espaço topológico $X$ e todo $r \geq 0$, se a homologia e a cohomologia singulares são tomadas com coeficientes num corpo $K$, tem-se um isomorfismo $H^r(X) \approx [H_r(X)]^*$.*

**Demonstração:** Definimos um homomorfismo $\varphi\colon H^r(X) \to [H_r(X)]^*$ pondo, para cada $[u] \in H^r(X)$ e cada $[z] \in H_r(X)$, $(\varphi[u]) \cdot [z] = u(z)$. Provamos os seguintes fatos:

1) *$\varphi$ está bem definido.* Com efeito, temos $[u] = [u + \delta v]$ e $[z] = [z + \partial x]$ com $v \in S^{r-1}(X)$ e $x \in S_{r+1}(X)$. Lembrando que $\delta u = 0$ e $\partial z = 0$, vem:

$$
\begin{aligned}
(u + \delta v) \cdot (z + \partial x) &= u(z) + u(\partial x) + (\delta v) \cdot (z) + (\delta v) \cdot (\partial x) \\
&= u(z) + (\delta u) \cdot (x) + v(\partial z) + v(\partial \partial x) \\
&= u(z).
\end{aligned}
$$

2) *$\varphi$ é sobrejetivo.* Dada $f \in [H_r(X)]^*$, podemos ver $f\colon Z_r(X)/B_r(X) \to \mathbb{R}$ como um homomorfismo $f\colon Z_r(X) \to \mathbb{R}$ tal que $f(\partial x) = 0$ para todo $x \in S_{r+1}(X)$. Como $Z_r(X) \subset S_r(X)$ é um subespaço vetorial, existe uma cocadeia $u\colon S_r(X) \to \mathbb{R}$ tal que $u|Z_r(X) = f$. Então, para toda $x \in S_{r+1}(X)$, temos $(\delta u)(x) = u(\partial x) = f(\partial x) = 0$, logo $u \in Z_r(X)$ e $u(z) = f(z)$ para todo $z \in Z_r(X)$, portanto $\varphi([u]) = f$.

3) *$\varphi$ é injetivo.* Seja $u\colon S_r(X) \to K$ um cociclo tal que $\varphi([u]) = 0$. Isto significa que $u(z) = 0$ para todo $z \in Z_r(X)$. Vamos mostrar que existe $v\colon S_{r-1}(X) \to K$ tal que $\delta v = u$, ou seja,

com $v(\partial x) = u(x)$ para toda cadeia $x \in S_r(X)$. Ora, como o conjunto $B_{r-1}(X)$ das $(r-1)$-cadeias que são bordos é um subespaço vetorial de $S_{r-1}(X)$, existe outro subespaço $E \subset S_{r-1}(X)$ tal que $S_{r-1}(X) = B_{r-1}(X) \oplus E$. Definimos então $v\colon S_{r-1}(X) \to K$ pondo $v(\partial x + e) = u(x)$ para todo $x \in S_r(X)$ e todo $e \in E$. Se $y \in S_r(X)$ for tal que $\partial y = \partial x$ temos $u(x) - u(y) = u(x-y) = 0$ pois $\partial(x-y) = \partial x - \partial y = 0$. Assim, a cocadeia $v \in S^{r-1}(X)$ está bem definida. Além disso, tem-se $(\partial v)(x) = v(\partial x) = u(x)$ para toda $x \in S_r(X)$, portanto $\delta v = u$.

**Corolário 1.** *Se $H_r(X)$, com coeficientes num corpo, é um espaço vetorial de dimensão finita então $H_r(X)$ é, para todo $r \geq 0$, isomorfo ao dual $[H^r(X)]^*$ do espaço vetorial de cohomologia $H^r(X)$.*

Com efeito, de $H^r(X) \approx [H_r(X)]^*$ resulta, tomando os duais, que $[H^r(X)]^* \approx [H_r(X)]^{**}$. Como $H_r(X)$ tem dimensão finita, é isomorfo a seu bidual. Logo $[H^r(X)]^* \approx H_r(X)$.

Assim, para toda superfície compacta orientável $M$ de dimensão $m$, tomando homologia e cohomologia singulares com coeficientes reais, vale a Dualidade de Poincaré $H_r(M) \approx H^{m-r}(M)$ para todo $r \geq 0$.

**Observação.** O Teorema de Dualidade de Poincaré é válido sob condições mais gerais: as superfícies não precisam ser diferenciáveis e os coeficientes não precisam ser números reais. Uma bela apresentação para superfícies poliedrais é feita no clássico texto de Seifert e Threlfall [ST]. Esses autores, porém, não tratam de cohomologia (que ainda não se desenvolvera na época), por isso o enunciado é dado na forma original de Poincaré, em termos de números de Betti e coeficientes de torção, numa superfície triangulável. Apresentações atuais (sem a mesma elegância) do caso poliedral se encontram nos livros de Cairns [C], Franz [F] e Prasolov [P]. O caso mais geral da dualidade de Poincaré em variedades topológicas é tratado nos livros de Spanier [S], Greenberg [G] e Prasolov [P], entre outros.

# 6 Cohomologia em termos da homologia

Quando tratarmos aqui de homologia e cohomologia, ficará subentendido o qualificativo "singular".

Se tomarmos coeficientes num corpo, cada espaço vetorial $H^r(X)$ é isomorfo ao dual $[H_r(X)]^*$, como vimos acima.

Estudaremos agora o que ocorre quando no $A$-módulo de cohomologia $H^r(X;A)$ os coeficientes pertencem a um anel comutativo qualquer $A$, dotado de unidade.

Vamos estabelecer relações entre o $A$-módulo $H^r(X;A)$ e os grupos de homologia $H_r(X)$ com coeficientes inteiros.

Ao escrevermos $S_r(X)$, $Z_r(X)$, $B_r(X)$ e $H_r(X)$ estaremos sempre admitindo coeficientes em $\mathbb{Z}$, únicos a serem usados aqui para homologia.

Inicialmente observamos que, se $G$ é um grupo abeliano e $A$ é um anel comutativo com unidade, o grupo $\mathrm{Hom}(G;A)$ dos homomorfismos de $G$ no grupo aditivo de $A$ possui uma estrutura natural de $A$-módulo, que usaremos sem maiores comentários.

Como antes, para cada $r \geq 0$ temos o homomorfismo

$$\varphi\colon H^r(X;A) \to \mathrm{Hom}(H_r(X);A),$$

definido por $\varphi([u]) \cdot [z] = u(z)$ para toda $u \in Z^r(X;A)$ e todo $z \in Z_r(X)$. Vimos que, quando $A$ é um corpo, o homomorfismo $\varphi$ é sobrejetivo. Isto ainda é verdade para todo anel $A$.

De fato, considerando que $H_r(X) = Z_r(X)/B_r(X)$, cada $f \in \mathrm{Hom}(H_r(X);A)$ é um homomorfismo de $Z_r(X)$ em $A$ que se anula sobre $B_r(X)$, logo podemos estender $f$ a um homomorfismo $u\colon S_r(X) \to A$, novamente porque existe um subgrupo $G \subset S_r(X)$ tal que $S_r(X) = Z_r(X) \oplus G$. Desta vez, a existência de $G$ (cfr. Lema 1, Capítulo I) se deve ao fato de que o grupo quociente $S_r(X)/Z_r(X) \approx B_{r-1}(X)$ é livre, como subgrupo do grupo livre $S_{r-1}(X)$.

Portanto, existe uma cocadeia $u\colon S_r(X) \to A$ tal que $u|Z_r(X) = f$. Como $f$ se anula em $B_r(X)$, $u$ é um cociclo. Com efeito, $(\delta u)(x) = u(\partial x) = 0$ para toda cadeia $x \in S_{r+1}(X)$.

Para qualquer $z \in Z_r(X)$, temos $\varphi([u]) \cdot [z] = u(z) = f(z)$, logo $\varphi([u]) = f$, portanto $\varphi$ é sobrejetivo. Vejamos qual é o núcleo de $\varphi$.

Chamando de $Z_r^\perp$ o conjunto das cocadeias $u\colon S_r(X) \to A$ que se anulam sobre $Z_r(X)$, veremos que $B^r(X;A) \subset Z_r^\perp$ e que o núcleo de $\varphi\colon H^r(X;A) \to \mathrm{Hom}(H_r(X);A)$ é o $A$-módulo quociente $Z_r^\perp/B^r(X;A)$. Uma descrição alternativa, e mais adequada, para o núcleo $\varphi^{-1}(0)$ será obtida identificando-o com $\mathrm{Hom}(B_{r-1}(X);A)/F$, onde $F$ é o $A$-módulo formado pelos homomorfismos $f\colon B_{r-1}(X) \to A$ que se estendem a $Z_{r-1}(X)$ (e portanto a $S_{r-1}(X)$). O isomorfismo

$$\psi\colon Z_r^\perp/B^r(X;A) \to \mathrm{Hom}(B_{r-1}(X);A)/F$$

resulta, por passagem ao quociente, da aplicação $u \mapsto \overline{u}$, de $Z_r^\perp$ em $\mathrm{Hom}(B_{r-1}(X);A)$, onde $\overline{u}(\partial x) = u(x)$, a qual está bem definida pois, sendo $u \in Z_r^\perp$, de $\partial x = \partial y$ se tira $\partial(x-y) = 0$, logo $u(x) - u(y) = u(x-y) = 0$.

Para justificar a obtenção de $\psi$ por passagem ao quociente, a partir do homomorfismo $\overline{\psi}\colon Z_r^\perp \to \mathrm{Hom}(B_{r-1}(X);A)$, dado por $\overline{\psi}(u) = \overline{u}$, onde $\overline{u}(\partial x) = u(x)$, devemos mostrar que $\overline{\psi}(B^r(X;A)) = F$. Isto se faz observando que se $u = \delta v$ então $u = v \circ \partial$, logo $\overline{u}(\partial x) = u(x) = v(\partial x)$, portanto $\overline{u}\colon B_{r-1}(X) \to A$ é a restrição de $v\colon S_{r-1}(X) \to A$, logo $\overline{u} \in E$. Assim, $\overline{\psi}(B^r(X;A)) \subset F$. A inclusão oposta é óbvia.

O $A$-módulo $\mathrm{Hom}(B_{r-1}(X);A)/F$ é conhecido em Álgebra Homológica como $\mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A)$ e assim, podemos escrever a seqüência exata

$$(*)\ 0 \to \mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A) \to H^r(X;A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(H_r(X);A) \to 0.$$

Compete-nos explicar o motivo da notação $\mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A)$

para indicar o núcleo do homomorfismo $\varphi$. Isto requer um pouquinho de Álgebra, para mostrar que, uma vez fixado o anel $A$, tal núcleo depende apenas de $H_{r-1}(X)$. Vejamos como.

Suponhamos que $B$ e $Z$ sejam grupos abelianos livres e que

$$0 \to B \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{j} H \to 0$$

seja uma seqüência exata. Então, para todo anel $A$ (comutativo, com unidade), a seqüência

$$0 \to \mathrm{Hom}(H; A) \xrightarrow{j^\top} \mathrm{Hom}(Z; A) \xrightarrow{i^\top} \mathrm{Hom}(B; A)$$

é também exata. Pondo $E$ = imagem de $i^\top$ = conjunto dos homomorfismos de $B$ em $A$ que se estendem a $Z$, afirmamos que o quociente $\mathrm{Hom}(B; A)/E$ depende apenas de $H$.

Com efeito, dada outra seqüência exata

$$0 \to B' \xrightarrow{i'} Z' \xrightarrow{j'} H' \to 0,$$

com $B'$ e $Z'$ livres, e dado um homomorfismo $f\colon H \to H'$, fazendo uso de bases em $B$, $Z$, $B'$, $Z'$ e das exatidões, podemos definir homomorfismos indicados pelas setas verticais, que tornam comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{j} & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[i']{} & Z' & \xrightarrow[z']{} & H' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Considerando Hom( $, A$) para os seis grupos acima, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H; A) & \xrightarrow{j^\top} & \mathrm{Hom}(Z; A) & \xrightarrow{i^\top} & \mathrm{Hom}(B; A) \\
 & & \big\uparrow & & \big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f^\#} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H'; A) & \xrightarrow[j'^\top]{} & \mathrm{Hom}(Z'; A) & \xrightarrow[i'^\top]{} & \mathrm{Hom}(B'; A)
\end{array}$$

no qual as duas linhas são seqüências exatas e, como de costume, $\top$ indica o homomorfismo adjunto.

Assim, o homomorfismo $f\colon H \to H'$ induz $f^{\#}\colon \mathrm{Hom}(B'; A) \to \mathrm{Hom}(B; A)$, tal que $f^{\#}(\mathcal{I}m.i'^{\top}) \subset \mathcal{I}m\, i^{\top}$. Resulta daí que $f^{\#}$, por sua vez, induz o homomorfismo

$$f^{*}\colon \frac{\mathrm{Hom}(B'; A)}{E'} \longrightarrow \frac{\mathrm{Hom}(B; A)}{E},$$

onde $E = \mathcal{I}m.i^{\top}$ = conjunto dos homomorfismos $\varphi\colon B \to A$ que se "estendem" a homomorfismos $Z \to A$, isto é, que admitem uma fatoração do tipo $\varphi = \overline{\varphi} \circ i$. Análoga definição para $E'$.

As escolhas de bases e pré-imagens feitas para definir os homomorfismos verticais afetam $f^{\#}$ mas, após passagem ao quociente, não afetam $f^{*}$. A partir desta observação (que o leitor pode comprovar) se conclui que $(g \circ f)^{*} = f^{*} \circ g^{*}$. Resulta daí que se $f\colon H \to H'$ é um isomorfismo, o mesmo acontece com $f^{*}$. Assim, o módulo quociente $\mathrm{Hom}(B; A)/E$ depende apenas de $H$ (que é isomorfo a $Z/B$) mas não de $B$ e $Z$ individualmente. Escreve-se então

$$\mathrm{Hom}(B; A)/E = \mathrm{Ext}(H; A).$$

Acabamos de ver que $\mathrm{Ext}(H; A)$ é um functor contravariante em $H$. Obviamente, ele é covariane em $A$.

A seqüência exata $0 \to B \to Z \to H \to 0$ é conhecida como uma "resolução livre" do grupo abeliano $H$. O que foi mostrado acima é que $\mathrm{Ext}(H; A)$ não depende da resolução livre tomada.

O functor Ext goza das propriedades abaixo, que podem ser demonstradas com maiores dificuldades, ou vistas em [P], [S] bem como (com crescentes graus de generalidade) em livros de Álgebra Homológica.

1. Se $H$ é livre, então $\mathrm{Ext}(H; A) = 0$;
2. $\mathrm{Ext}(H \oplus H'; A) = \mathrm{Ext}(H; A) \oplus \mathrm{Ext}(H'; A)$;
3. Se $H = \mathbb{Z}_m$ então $\mathrm{Ext}(H; A) = A/m.A$. Assim, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$.

A seqüência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A) \xrightarrow{i} H^r(X;A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(H_r(X);A) \to 0,$$

onde $i$ é a inclusão, constitui o que se chama o *Teorema dos Coeficientes Universais*. Quando $A$ é um corpo ou quando $H_{r-1}(X)$ é um grupo livre, o Teorema dos Coeficientes Universais se reduz ao isomorfismo

$$H^r(X;A) \approx \mathrm{Hom}(H_r(X);A).$$

Um importante fato a respeito desta seqüência é que ele é separável, o que nos permite concluir que

$$H^r(X;A) = \mathrm{Hom}(H_r(X);A) \oplus \mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A),$$

conforme mostraremos a seguir. Começamos com o

**Lema 2.** *Existe um homomorfismo* $\lambda\colon \mathrm{Hom}(H_r(X);A) \to H^r(X;A)$ *tal que* $\varphi(\lambda(v)) = v$ *para todo* $v \in \mathrm{Hom}(H_r(X);A)$.

**Demonstração:** Os elementos de $\mathrm{Hom}(H_r(X);A)$ são os homomorfismos $v\colon Z_r(X) \to A$ tais que $v(\partial x) = 0$ para toda cadeia $x \in S_{r+1}(X)$. A cada um desses homomorfismos $v$ devemos fazer corresponder uma classe de cohomologia $[\overline{v}] = \lambda(v) \in H^r(X;A)$ tal que $\varphi([\overline{v}]) = v$, ou seja, $v(z) = \overline{v}(z)$ para todo ciclo $z \in Z_r(X)$. Como o quociente $S_r(X)/Z_r(X) \approx B_{r-1}(X)$ é um grupo livre, podemos encontrar um subgrupo $N \subset S_r(X)$ tal que $S_r(X) = Z_r(X) \oplus N$, ou seja, toda cadeia $x \in S_r(X)$ se escreve, de modo único, como $x = z + y$, onde $z \in Z_r(X)$ e $y \in N$. Então definimos a co-cadeia $\overline{v}\colon S_r(X) \to A$ pondo, para cada $x = z + y$, $\overline{v}(x) = v(z)$. Mostremos que $\overline{v}$ é um cociclo. De fato, para toda $w \in S_{r+1}(X)$, vale $\delta\overline{v}(w) = \overline{v}(\partial w) = v(\partial w) = 0$ pois $v$ se anula nos bordos. Evidentemente, se $z \in Z_r(X)$, temos $\overline{v}(z) = v(z)$, portanto $\lambda(v) = \overline{v}$ define o homomorfismo desejado.

**Teorema 8.** *A seqüência exata*

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{r-1}(X);A) \xrightarrow{i} H^r(X;A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(H_r(X);A) \to 0$$

*é separável, portanto tem-se*

$$H^r(X;A) = \text{Hom}(H_r(X);A) \oplus \text{Ext}(H_{r-1}(X);A).$$

**Demonstração:** Acima, $i$ é a aplicação de inclusão. Com a notação do Lema 2, devemos mostrar que

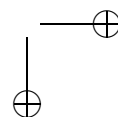
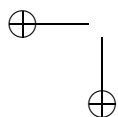
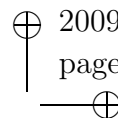
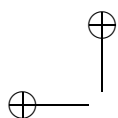
$$H^r(X;A) = \mathcal{I}m(\lambda) \oplus \mathcal{N}(\varphi) = \mathcal{I}m(\lambda) \oplus \mathcal{I}m(i).$$

Com efeito, todo elemento $\alpha \in H^r(X;A)$ se escreve como $\alpha = \lambda\varphi(\alpha) + (\alpha - \lambda\varphi(\alpha))$, onde $\lambda\varphi(\alpha)$, evidentemente, pertence a $\mathcal{I}m(\lambda)$ enquanto $\alpha - \lambda\varphi(\alpha)$ pertence a $\mathcal{N}(\varphi)$ pois

$$\varphi(\alpha - \lambda\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) - \varphi\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha) = 0.$$

Além disso, tem-se $\mathcal{I}m(\lambda) \cap \mathcal{N}(\varphi) = \{0\}$ pois se $\alpha \in \mathcal{I}m(\lambda) \cap \mathcal{N}(\varphi)$ então

$$\alpha = \lambda(\beta) = \lambda\varphi\lambda(\beta) = \lambda\varphi(\alpha) = \lambda(0) = 0.$$

Isto completa a prova do teorema.

# Referências Bibliográficas

[CA2] Elon Lages Lima. Curso de Análise, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, 10ª edição, 2008.

[AR3] Elon Lages Lima. Análise Real, vol. 3, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 3ª edição, 2008.

[GFER] Elon Lages Lima. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Projeto Euclides, IMPA, 2ª edição 1998.

[ETG] Elon Lages Lima. Elementos de Topologia Geral, Editora LTC, Rio, 1970.

[EM] Elon Lages Lima. Espaço Métricos, Projeto Euclides, IMPA, 4ª edição 2005.

[C] S. Cairns. Introductory Topology, Ronald Press 196

[D] J. Dieudonné. Éléments d'Analyse, Tome IX, Gauthier-Villars 1982.

[F] W. Franz. Topologie. De Gruyter 1964.

[G] M. Greenberg. Lectures on Algebraic Topology, W.A. Benjamin 1967.

[H] A. Hatcher. Algebraic Topology, Camdridge U. Press 2002.

[M] J. Munkres. Elementary Differential Topology, Princeton 1966.

[P] V. Prasolov. Elements of Homology Theory, American Mathematical Society, 2007.

[S] E. Spanier. Algebraic Topology, McGraw-Hill 1966.

[S-T] H. Seifert-W. Threlfall. A Textbook of Topology, Academic Press 1980.

# Índice Remissivo